

UNIVERSAL  
LIBRARY

**OU\_224643**

UNIVERSAL  
LIBRARY



# AN ELEMENTARY TREATISE

ON THE

## THEORY OF EQUATIONS

WITH A COLLECTION OF EXAMPLES

BY

L. TODD HUNTER, M. A., F. R. S.

TRANSLATED INTO URDU

BY

MUNSHI MAHAMMAD ZAKA-UL-LAH,

Head Master, Normal School, Delhi

IN FURTHERANCE OF THE OBJECTS OF THE  
SCIENTIFIC SOCIETIES OF ALLYPURH AND SUBA  
BEHAR

رسالہ مسائل معانیات

معہ بہت سی مثالوں کے

مرافقہ

ڈر ہنٹر صاحب ایم ای ایف آر ایس

جسکو

منشی محمد ذکار اللہ صاحب ہیڈ ماسٹر نارمل اسکول دہلی نے

بقائید مقاصد

سین ٹیٹل سوسائٹی علیگڑہ و سین ٹیٹل سوسائٹی صوبہ بہار

اُردو میں ترجمہ کیا

اور

بمقام دہلی مطبع مرتضوی میں باقیمام حاجی

محمد عزیز الدین کے مطبع سے

سنہ ۱۸۷۱ ع





## بسم اللہ الرحمن الرحیم دیس جا

اس رسالہ میں جملہ مسائل معادلات کی جو اکثر کتب صولیمہ میں ہوا کرتے ہیں لکھی ہیں اور انکی ساتھ بہت سی مثالیں یعنی دہائی کی سوالات امتحان ہی منتخب کر کے تحریر کی ہیں

مسائل معادلات میں اکثر عجیب و غریب اور دلچسپ ایسی نتائج ہوتی ہیں کہ اگر طالب علم ابتداء تحصیل علوم ریاضیہ میں ان کو تحصیل کرے تو بہت فائدہ ہی اوسکو حاصل ہوتی ہیں اس رسالہ کو وہی طالب علم پڑھ سکتی ہیں جو الجبر اسی خوبیاں میں آئیں کہیں بڑی علم کی ضرورت سواء دفعات ۱۷۵ و ۲۷۴ و ۳۰۸ - ۳۱۷ کے نہیں پڑتی ان دفعات کو طالب علم جب تک نہ مطالعہ کریں کہ وہ علم مثلث میں ضابطہ ڈی مولور سے واقف ہوں یہ کتاب حقیقت میں ایک ضخیمہ بڑی جبر مقابلہ کا ہی اسلی اس کتاب میں جو الہ جا بجا جبر مقابلہ کی دفعات کا دیا گیا ہے

اس رسالہ میں ایسی تحقیقات بہت سی لکھی گئی ہیں جنکا نام ہی کسی اور رسالہ مسائل معادلات میں نہیں پایا جاتا مثلاً او میں ہی ایک کاجی کا ثبوت ہے کہ ہر سوات کی ایک قیمت ہوتی ہے پورنر کی ترکیب اور مسائل اسقاط اور ضابط کاجی حسب کا خیالی قیمتوں کی تعداد کی بیان میں اور ضابطہ مقطعات کا عرض یہ مضامین اور بعض اور اسکی اسی کتاب میں اول اول لکھی گئی ہیں جناب لودھنر صاحب کی تصنیفات میں یہ عجیب کتاب ہے فہرست مضامین یہہ ہے

باب	مضمون	صفحہ
پہلا باب	درباچہ	۱
دوسرا باب	وجود قیمت کے بیان میں	۱۶
تیسرا باب	خواص معادلات	۲۲
چوتھا باب	تبدیل ہوتے مساوات	۳۲
پانچواں باب	ڈس کا ریس کا قاعدہ علامات	۴۰
چھٹا باب	مساوی قیمتیں	۴۷
ساتواں باب	مساوی قیمتوں کی حدود غائی اور قیمتوں کا جدا جدا کرنا	۵۶
اٹھواں باب	قیمتیں محدود اور نا طاقہ	۷۲
نواں باب	تشرل معادلات	۷۷
دسواں باب	معادلات متکافئہ	۸۴
گیارہواں باب	معادلات شنائی	۸۹
بارہواں باب	معادلات کمعی	۹۸
تیرہواں باب	معادلات درجہ چہارم	۱۰۹
چودھواں باب	سٹریم حساب کا ضابطہ	۱۱۷
پندرہواں باب	فوریر کا ضابطہ	۱۲۷
سولہواں باب	لاگرانژ کی ترکیب تقرب	۱۳۲
سترہواں باب	یونٹ حساب کی ترکیب تقرب اور فوریر کا ضمیمہ	۱۴۰
اٹھارہواں باب	ہورنر کی ترکیب	۱۴۸
اونیسواں باب	قیمتوں کے بالقرینہ حملے	۱۶۲
بیسواں باب	استعمال بالقرینہ جملوں کا	۱۷۱
ایکسواں باب	قیمتوں کی قوتوں کے مجموعی	۱۷۷
بائیسواں باب	دور کرنا مقداریں پھول کا یعنی اسقاط	۱۸۶
تیسواں باب	سلسلہ میں جملہ کا پہلانا	۱۹۹
چوبیسواں باب	مسائل متفرقہ	۲۰۷
پچیسواں باب	ادخال مقطعات	۲۲۷
چھبیسواں باب	خواص مقطعات	۲۳۸
ستائیسواں باب	استعمال مقطعات	۲۴۷
	مثالیں	۲۶۷
	جواب	۲۸۷

# مسائل

## دیباچہ

(۱) جبر مقابلہ کی بائیسویں مسائل مساوات میں طالب علم نے ٹیڑھا ہو گا کہ مساوات  $a + b + c = 0$  کی دو قیمتیں

$$-b = \frac{a^2 - c^2}{2a}$$

ہیں اور ان قیمتوں کی کیفیت یہی کہ اول کا مجموعہ برابر ہی  $-b$  کی اور حاصل ضرب برابر  $\frac{c^2 - a^2}{4}$  کی یعنی مجموعہ ان قیمتوں کا برابر ہی مساوات  $a + b + c = 0$  کی دوسری قسم کی سر کی جسکی علامت بدلی ہوئی ہے اور اول کا حاصل ضرب برابر ہی مساوات کی آخری قسم کے پس طالب علم اس مضمون کو خوب غور خیال کر کے سمجھ لے کہ اس سالہ کی تمام مضامین اقسیمی کم ہیں جبر مقابلہ میں مساوات درجہ دوم کی خواص بیان ہوئی یہاں مساوات درجہ دوم سے اعلیٰ درجہ کی مساواتوں کے خواص مسائل بیان ہو گئی گویا یہاں پروجیم نے لکھا ہے وہ ایک نمونہ ہی اس پر قیاس کر کے طالب علم اس کتاب کے ساری مضامین کا تصور ذہن میں کر سکتا ہے۔ یہ نتائج اور مسائل جو بیان ہو گئے وہ اور فروع ریاضیہ میں کام آئینگے اور ان مسائل کی مشق طلبہ کی واسطی نہایت سود مند ہوگی جو طالب علم کہ علم جبر مقابلہ جانتی ہیں ان کو اس قبل کی مشق چنداں مشکل اور دشوار بھی نہیں یہ ایک مضمون بوقلمون اور فنی توجہ اور مطالعہ کی عادت ثمرانی کی واسطی ایک عجب چیز ہے

(۲) مساوات اور قیمت مساوات کا معنی طلبہ علم جبر مقابلہ میں خوب سمجھ گئی ہوگی مگر ہم ان کی یہاں تعریف پر لکھتی ہیں جس سے مطلب خوب صفا اور عیاں ہو جا

جس جبر یہ جملہ میں لامندرج ہو اس کو جملہ لاکہتی ہیں اور ج (۱) سے تعبیر کرتی ہیں اور جو مقدار لاکہ جگہ ج (۲) میں رکھی جائی اور وہ ج (۳) کو فنا اور نابود کردی اس کو قیمت مساوات

ج (لا) = ۰ کی کہتے ہیں (اس ساری کتاب میں مساوات اور معادلہ کی ایک ہی معنی میں ترجمہ)

$$۱۱ + ۱ = ۱۲ \quad ۱۱ + ۱ = ۱۲ \quad ۱۱ + ۱ = ۱۲$$

کی صورت کا جو جملہ ہو اور اوپر میں مثبت صحیح عدد ہو اور مثال ۱۱ + ۱ = ۱۲ کی صورت میں لا داخل نہ رکھتا ہو تو اس کو درجہ کا صحیح جملہ ناطق لا کا کہتے ہیں اگر ہم کو یہ درجہ کرنا ہو کہ وہ کوئی لاکھ قیمت ہی کہ اس جملہ کو فنا کرتی ہی تو اس کی بہت سی ہونگی کہ ہم درجہ کی صحیح ناطق کی قیمت دریافت کرتی ہیں اس سالہ میں ساری بحث اسی مساوات پر ہوگی اسی مساوات میں اگر ہم چاہیں تو لاکھ کی قیمت اعلیٰ کی مثال پر مساوات کو تقسیم کر کے مساوی اعلیٰ قیمت کا ایک بنا لیں تو مساوات کی یہ صورت ہو جائیگی

$$۱۱ + ۱ = ۱۲ \quad ۱۱ + ۱ = ۱۲ \quad ۱۱ + ۱ = ۱۲$$

اس مساوات کو سادہ صورت مساوات کہتی ہیں اور اس سادگی کی کیفیت الگ کہل جائیگی جب لا کا سرلیک ہوتا ہی تو خواص والوں کی بہت ٹھیک ٹھیک اور درست بیان ہوتی ہیں اور جب یہ نہیں ہوتا تو مساواتوں کی خواص بیان کرتی ہیں کچھ دقت پڑتی ہی اگر ہم کو یہ منظور نہ ہو کہ لا کے مثال کو واحد بنائیں تو اس کو سی تعبیر کریں تو مساوات کی یہ صورت ہو جائیگی

$$۱۱ + ۱ = ۱۲ \quad ۱۱ + ۱ = ۱۲ \quad ۱۱ + ۱ = ۱۲$$

(۳) یہ ہمیشہ یاد رکھنی کی بات ہے کہ ہماری مساوات یا معادلہ سی مراد یہ ہوتی ہی کہ صحیح ناطق مساوات اور اگر وہ مساوات اس صورت کی نہ ہو تو تخیلات جبر یہی اس صورت کی طرف تخیل ہو سکتی ہے مثلاً مساوات ۱۱ + ۱ = ۱۲ میں ۱۱ + ۱ = ۱۲ تو یہ مساوات مساوات منطق کی طرف اس طرح تخیل ہو سکتی ہی کہ ۱۱ اور ۱ کو منتقل کر کے مجذور کر لیں تو مساوات منطق صحیح درجہ چہارم کی بن جائیگی جن مساواتوں میں لو کا رخی جملی یا قوت نامی جملی یا علم مثلثی جملی یا اضم جملہ مندرج ہوں وہ ہمارے تحقیقات کی اندازہ بصیرت داخل نہیں ہوئیں مثلاً اس قسم کی مساواتیں کہ لا = ۱ اور لا کو لا = ۱ داخل نہیں ہو گئے باری تحقیقات میں صحت ایسی والوں





۴+	۵-	۰	۲-	۳
۱۷۲+	۴۳+	۲۱	۹+	
۱۸۱+	۵۸+	۲۱+	۷+	۳

پس پھل ۱۸۱ ہو

(۶) اگر لا = ۱ کی کسی جملہ صحیحہ ناطقہ کو فنا کری تو وہ جملہ پورا لا - ۱ پر تقسیم ہوگا

فرض کرو کہ ج (لا) اس جملہ کو تعبیر کری اور ہم کو یہ معلوم ہی کہ ج (لا) = ۰ تو ہم کو یہ ثابت کرنا ہی کہ ج (لا)

لا - ۱ پر پورا تقسیم ہوگا

ج (لا) کو لا - ۱ پر موافق قاعدہ درج جبریہ کی تقسیم کی جائے جب تک کہ باقی میں لا نہ رہی اور فرض کرو کہ ق خارج قسمت ہی اور اگر کوئی باقی رہتی تو وہ ہی تو

ج (لا) = ق (لا - ۱) + ر اس متعلقہ میں لا کی جگہ ۱ رکھو تو اس سبب سے کہ

ق جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا ہی تو وہ لا = ۱ کی کہنی سی لا نہایت نہیں ہو سکتا اس واسطی جب لا = ۱ کی ہو

تو ق (لا - ۱) فنا ہو جائیگا اور بموجب فرض کی لا = ۱ کے ہونی سی ج (لا) بھی فنا ہوتا ہے

اصلی جب لا = ۱ کے ہو تو رہی فنا ہونے ہی اور چونکہ زمین لا نہیں ہی تو جب وہ لا = ۱ کے

ہونی سی فنا ہونے ہی تو وہ ہمیشہ فنا ہوگا یعنی ر = ۰ اور لا - ۱ تقسیم ج (لا) کو پورا کرتا ہے

(۷) جس مسئلہ کا ثبوت اوپر لکھا ہی وہ ثبوت ایک عظمت رکھتا ہی اور سچے کو بڑا مانا ہی مگر اس کے

ثبوت کو ایک اور طرح لکھتی ہیں اور میں خارج قسمت ق کی ایسی صورت ظاہر ہوتی ہی کہ ادنیٰ اور زیادہ فائدہ

ہوتا ہی فرض کرو کہ

ج (لا) = ع (لا) + ع (لا) + ع (لا) + ... + ع (لا) + ع (لا) + ع (لا)

چونکہ ج (لا) = ۰ تو ج (لا) = ج (لا) - ج (لا)

= ع (لا) - ع (لا) + ع (لا) - ع (لا) + ع (لا) - ع (لا) + ... + ع (لا) - ع (لا) + ع (لا) - ع (لا)

اب جبر معادلہ کی دفعہ ۴۸ کی موافق لا - ۱ اور لا - ۱ - ۱ ... میں ہر ایک لا - ۱ پر

پوری تقسیم ہوتی ہی اس بات سے یہ کرنے سی ہر کو خارج قسمت پر حاصل ہوگا کہ

$$\begin{aligned} & \text{ع.} (1-1+2-1+3-1+4-1+5-1+6-1+7-1+8-1+9-1+10-1) \\ & + \text{ع.} (1-2+2-3+3-4+4-5+5-6+6-7+7-8+8-9+9-10) \\ & + \dots + \end{aligned}$$

$$+ \text{ع.} (1-2+2-3+3-4+4-5+5-6+6-7+7-8+8-9+9-10)$$

$$+ \text{ع.} (1-2+2-3+3-4+4-5+5-6+6-7+7-8+8-9+9-10)$$

$$\begin{aligned} & \text{اب اس خارج قسمت کو اس ترتیب سے لکھنی ہیں کہ} \\ & \text{ع.} (1-2+2-3+3-4+4-5+5-6+6-7+7-8+8-9+9-10) \\ & + \text{ع.} (1-2+2-3+3-4+4-5+5-6+6-7+7-8+8-9+9-10) \\ & + \dots + \text{ع.} (1-2+2-3+3-4+4-5+5-6+6-7+7-8+8-9+9-10) \end{aligned}$$

اور اسکو ہم

$$\text{ق.} (1-2+2-3+3-4+4-5+5-6+6-7+7-8+8-9+9-10)$$

سے تعبیر کرتی ہیں

اسطے پہنچاں جدید مثال قدیم کی ان صورتیں میں اسطرح مربوط ہوتے ہیں

$$\text{ق.} = \text{ع.} \text{ اور } \text{ق.} = \text{ا.ق.} + \text{ع.} \text{ اور } \text{ق.} = \text{ا.ق.} + \text{ع.}$$

$$\text{اور } \text{ق.} = \text{ا.ق.} + \text{ع.}$$

یعنی ہر ایک مثال جدید اسطرح حاصل ہوتا ہے کہ ہر ایک مثال جدید کو اسکی باقی مثال جدید میں ضرب دو اور حاصل ہر منظرہ مثال قدیم زیادہ کرو اور یہی خیال کرنا چاہیے کہ ہر ایک مثال جدید دفعہ ۵ کے عمل سے حاصل ہوتا ہے

(۸) اگر ج (۹) ایک جملہ صحیح ناطقہ لاکا ہو اور اسکو لا۔ انقسم کرنا ہو تو لا قیمت

مساوات ج (۹) = کے ہوگی

دلیل فرض کرو کہ ج (۹) کو جب لا۔ انقسم کریں تو خارج قسمت ق نکلتا ہر قوج (۹) = ق (۹-۱)

اگر انہر منظرہ مین لا کی جگہ اربعین نونی کی لا انتہا ہونی کی سبب ق (۹-۱)





اول سطر اس جملہ کی توجہ (لا) ہی اور کی مثال کو ہم ج (لا) سے اور  
 مثال  $\frac{1}{2}x^2$  کو ج (لا) سی اور مثال  $\frac{1}{3}x^3$  کو ج (لا) سی اور علیٰ ہذا القیاس تعبیر کرو  
 یہ طریقہ کتابت خالی از دقت و وسوف نہ ہوگا کہ بہت سی زبرین لگانی پڑیں گے  
 پس عموماً ہم  $\frac{1}{n}x^n$  کی مثال کو ج (لا) سے تعبیر کرتے ہیں اسی معلوم ہوا کہ  

$$ج (لا) = ج (لا) + ج (لا) + ج (لا) + ج (لا) + \dots + ج (لا)$$

$$\dots + ج (لا) + ج (لا) + \dots + ج (لا)$$

دیکھیں یہی معلوم ہوتا ہے کہ ج (لا) وج (لا) وج (لا) وج (لا) وج (لا) . . . ج (لا) اس قاعدہ عامہ کی موافق تمام مربوط ہوتی ہیں کہ ج<sup>+</sup> (لا) کے حاصل کرنی کی واسطی ہم ہر ایک رفع (لا) کو لا کے قوت نامین جو اس فہم میں ہو ضرب دیتی ہیں اور اس قوت نامین ہی ایک گہٹا کر قوت مہماتے ہیں

(۱۱) فرض کرو کہ ج (۷۱) جو تہی درجہ کا ہے اور

$$٧ع + ٤٢ع + ١٢١ع + ١١١ع + ١١١ع = (٧) ج$$

نو ج' (۷) =  $E^N + {}^N_1E^{N-1} + {}^N_2E^{N-2} + \dots + E$

$$1 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^2 \times 3 + 11 \cdot 2^2 \times 4 = (11) \text{ ج}$$

$$1, 2 \times 3 + 4, 5 \times 3 \times 4 = (1) \text{ مچ}$$

$$2 \times 3 \times 4 = (12) \text{ ج (12)}$$

$$(1) \int \frac{1}{x} + (1) \int \frac{1}{x^2} + (1) \int \frac{1}{x^3} + (1) \int x + (1) \int = (s+1) \int$$

اگر ہم  $\frac{1}{x}$ ،  $\frac{1}{x^2}$ ،  $\frac{1}{x^3}$ ،  $\frac{1}{x^4}$  اور  $\frac{1}{x^5}$  کی تعداد فی مرتبہ کر کے توجہ (لا) اور ج (لا) ... کا حساب فقہ کی ترکیب کے موافق ہو سکتا ہے جب ہم ہر مرتبہ کی ترکیب و اتون کی حل کرنی کی بات کرینگے تو وہیں تبدیلی کے کہ یہ حساب سطح اسانی ہی نہایت ضبط کی ساتھ ہو سکتی ہیں

(۱۲) اگر ہم سلسلہ ج (لا) کا آغاز کی اعلیٰ قوت سی کرین تو یہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{ج (لا)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} + \dots$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} + \dots$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} + \dots$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} + \dots$$

جو صورت ہم فی ج (لا) کی اوپر ایسی لکھی ہے اسی بہ صورت مستطہ ہو سکتی ہے یا ج (لا) کے ہر رقم کو پہلا کر لکھیں اور کی قواد متنازلہ کی ترتیب سی لکھیں تو یہی مطلب حاصل ہو جائیگا

(۱۳) جملہ ج (لا) کو ج (لا) کا اول جملہ مشتقہ اور ج (لا) کو دوم جملہ مشتقہ اور علیٰ ہذا القیاس کہتی ہیں جطابق اصول علم مفسولات سی واقف ہوگا تو اسکو معلوم ہوگا کہ ہر جملہ مشتقہ انہی اقبل کی جملہ کا سر مفسول لمجاٹ لاکھی ہوتا ہے اور ج (لا) کے واسطی جو جملہ قواء دین لکھا ہے وہ ایک مثال ٹیلر حساب کے ضابط کی ہے

علاوہ برین یہ امر بھی ملحوظ خاطر رہی کہ ج (لا) جسطح ج (لا) سی استخراج ہوتا ہے اور ج (لا) کا ج (لا) سی مستطہ ہوتا ہے پس ج (لا) اول جملہ مشتقہ ج (لا) کا اور دوم جملہ مشتقہ ج (لا) کا ہی اور علیٰ ہذا القیاس یہی معلوم ہوگا کہ بموجب دفعہ گذشتہ کی

$$\text{ج (لا)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} + \dots$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} + \dots$$

اور علیٰ ہذا القیاس

ج (لا) = ج (لا) + ج (لا) + ج (لا) + ج (لا) + ج (لا) + ...



دینا ہے  
اب ہم بعض سید ہی ہاوی اخذات لکھینگے جیسی یہ ثابت ہوگا کہ خاص صورتوں میں ایک قیمت کا  
وجود ہوتا ہے ایک مسئلہ کی ضرورت پڑتی ہے جو بدیہی جائز تسلیم کر لیا کرتی ہیں مگر ہم اسکو دفعہ ذیل میں  
ثابت کرتے ہیں

(۱۶) فرض کرو کہ ج (لا) ایک جملہ صحیحہ ناطقہ جملہ لاکا ہو اور اسکی قیمتیں ج (۱) اور  
ج (ب) موافق لاکا کی اور ب کی قیمتوں کی ہوں یعنی ج (لا) میں جب لاکا جگہ الگ ہیں تو ج (لا)  
کی قیمت ج (۱) حاصل ہو اور علیٰ ہذا القیاس ج (ب) تو لاجب اسی بدل کر ب بنی گانہ ج (لا)  
ج (لا) سی بدل کر ج (ب) بنی گا اور ج (۱) اور ج (ب) کی سب زمینی قیمتوں پر اسکی نوبت پہنچو  
اب فرض کرو کہ لاکا قیمت میں لگائی جائی اور اسکی موافق ج (لا) کی قیمت ج (س) ہو اب لاکا کی  
ایک اور قیمت س + صہ مقرر کرو نہ کہ کو کافی چھوٹا فرض کرنی سی ہم ج (س + صہ) اور ج (س)  
کے تفاوت کو جتنا چاہیں کم کر سکتی ہیں اسواسطے کہ

$$ج (س + صہ) = ج (س) + صہ ج (س) + \frac{صہ^2}{2} ج (س) + \dots + \frac{صہ^{n-1}}{(n-1)!} ج (س) + \frac{صہ^n}{n!} ج (س)$$

اب پہرہ جو بدیہی دفعہ ۱۷ کی صہ کو کافی چھوٹا فرض کر کے اول رقم سلسلہ صہ ج (س) اور صہ ج (س)  
اور صہ ج (س) کو جو معدوم نہیں ہوتی ایسا بنا سکتی ہیں کہ وہ اپنی کل البعد کی قیمتوں کے  
مجموعہ سی جتنی گنی ہم چاہیں ہر صہ اور صہ کو کافی چھوٹا فرض کرنی سی یہ رقم خود بخود چھوٹی ہم چاہیں  
ہیں سکتی ہی اسواسطے ج (س + صہ) - ج (س) کو جتنا چاہیں صہ کو چھوٹا فرض کر کی بنا سکتی ہیں  
اسی ثابت ہوتا ہے کہ لاجب یہ بدیہی ہاوی اسواسطے ج (لا) بتدریج بدلتا ہے اگر ج (لا) کی کوئی قیمت  
موافق قیمت شخصہ لاکا ہو تو اسکی دوسری قیمت پہلی قیمت کی قریب جتنی ہم چاہیں موافق  
لا کی دوسری قیمت کی جو پہلی قیمت شخصہ کے کافی قریب ہونی سکتی ہیں اسی معلوم ہوا کہ جب لا  
اسی ب تک بدلتا ہی تو جملہ ج (لا) قیمت ج (۱) سی قیمت ج (ب) تک نوبت بدلتا ہی  
اور اسکی اندر کہیں گسنگی نہیں واقع ہوتی اسواسطے کہ اگر یہ کہا جاتا کہ اسکی اندر گسنگی واقع ہوتی ہے  
تو اسکی یہ معنی ہیں کہ ہم لاکا ایسی قیمت نہیں مقرر کر سکتی کہ وہ پہلی قیمت کی قریب ہماری مرضی کی موافق ہو

(۱۷) دفعہ گذشتہ میں ہم نے یہ تو نہیں بیان کیا کہ ج (۱۸) ہمیشہ ج (۱۹) سی ج (ب) تک مرتب ہے  
 یا ہمیشہ ج (۱) سی ج (ب) تک کہتا ہی اسلی مختلف صورتیں ہونگی کہی زیادہ ہوگا کہی کم ہوگا  
 لیکن یہ ہم نے بیان کیا ہی کہ وہ نوبت بہ نوبت بتدریج قیمت ج (۱) سی قیمت ج (ب) تک  
 تبدیل ہونا ہی اور یہ تبدیل یکا یک نہیں ہوتا بلکہ نوبت بہ نوبت ہونا ہی یہ ایک بڑا مفہوم ہی اور  
 اگر طالب علم اس پر غور کر لگا تو اسکو دیدہات سی معلوم ہوگا کیونکہ یہ بات ظاہر ہی کہ لاکھ  
 پڑتا ہی قیمت کی موافق ج (۱۸) کی ہی مقرر ہی قیمت ہوگی اور یہ ہم نے ثابت کر دیا کہ اگر لاکھ  
 نے نہایت چھوٹی تبدیلی کیجائی تو ج (۱۸) میں بھی بی نہایت چھوٹی تبدیلی ہوگی پس اس سے ج (۱۸) کے  
 متواتر قیمتوں میں جو درجہ بدرجہ ہوتی ہیں کہیں گستگی اور گستگی نہیں واقع ہوگی

(۱۸) طالب علم اگر ہندسہ ابجری واقف ہوگا تو اسکو یہ مضمون اور بڑا دلچسپ معلوم ہوگا  
 وہ خطوط مخفی جو جملوں کو تعبیر کریں بنا لگا اور اول بر غور اس طرح کر لگا کہ ج (۱۸) کو سی تعبیر کریگا  
 پس ج (۱۸) کو مساوات خط مخفی کی خیال کر لگا اور پھر اس خط مخفی کے اوس حصہ کو  
 جو درمیان  $\Delta = \Delta$  اور  $\Delta = \Delta$  کی واقع ہے فرض کر لگا پھر سی اوس کی ذہن میں یہ عمدہ تصور  
 پیدا ہوگا کہ ج (۱۸) کی وسطی قیمتیں مابین ج (۱) اور ج (ب) کی درمیان تشخیص کیجائیں  
 اور نہیں ضرور ہی کہ متواتر ہوا اور کہیں اور نہیں گستگی نہ واقع ہو

اس بات پر بھی لحاظ رہی کہ  $\Delta$  اور ب اور ج (۱) اور ج (ب) کی ساتھ مثبت ہونی کی قید نہیں ہے  
 ج (۱) اور ج (ب) کی مابینی قیمتوں کی معنی علم جبر مقابلہ کی موافق لے لی گئی میں معنی بمقداری کو  
 ج (۱) اور ج (ب) کی مقدار مابینی کہینگے اگر سی ج (۱) اور ج (ب) سی کے ایک حصہ ہوں  
 (۱۹) اگر لاکھ جملہ صحیحہ ناطقہ ج (۱۸) میں لاکھ جگہ دو عدد رکھی جائیں اور اونس قیمتیں ج (۱۸)  
 کی مختلف اعلاست حاصل ہوں تو ضرور ہی کہ کم از کم ایک قیمت مساوات ج (۱۸) = کی  
 لاکھ اور قیمتوں کی درمیان واقع ہو۔

فرض کرو کہ  $\Delta$  اور ب وہ قیمتیں ہیں تو ج (۱) اور ج (ب) مختلف اعلاست ہوں فرض کریں۔

۱۳  
 اور بموجب دفعہ ۱۲ کی جب لا بتدریج و سی بانگ بدلتا ہی تو جملہ ج (لا) بغیر کسی سنگی قیمت کی  
 ج (۱) سی ج اب نہنگ بدلتا ہی لیکن اس سبب کے کہ ج (۱) اور ج (ب) مختلف اعلیٰ قیمت ہیں  
 تو قیمت صفحہ کی اونکی درمیان واقع ہوگی اسلیٰ ضروری کہ موافق کسی قیمت کی جو اور کے درمیان  
 واقع ہو ج (لا) برابر صفحہ کی ہو اور اسکی یہی معنی ہیں کہ مساوات ج (لا) = -

کی ایک قیمت درمیان اور ب کے واقع ہوتی ہے  
 (۲۰) مساوات طاق درجہ کی ضرور ایک اصلی قیمت کہتی ہے  
 فرض کرو کہ مساوات ج (لا) = - سے تعبیر مع یہاں

$$\text{ج (لا)} = \text{ع} - \text{لا} + \text{ع} - \text{لا} + \dots + \text{ع} - \text{لا} + \text{ع} - \text{لا}$$

اسمین ان ایک طاق عدد ہی  
 جب لا کافی بڑا ہو تو بموجب دفعہ ۱۲ کی اول رقم ج (لا) کی یعنی ع - لا باقی ارقام کی مجموعہ بڑا ہوگا  
 اسواسطے ج (لا) کی علامت وہی ہوگی جو ع - لا کی علامت ہی پس لا کو کافی بڑا مقرر کرنے سے  
 اگر ثابت ہو تو ج (لا) کی وہی علامت ہوگی جو ع - لا کی علامت ہی اور اگر لا منفی ہوگا تو  
 ج (لا) کی علامت مخالف ع - لا کی علامت کی ہوگی پس اس سبب کے کہ لا کی ایک مناسب مثبت قیمت  
 جب بدل کر ایک مناسب منفی قیمت ہو جاتی ہی تو علامت ج (لا) کی بدلتی ہی ضروری کہ ایک قیمت  
 درمیان لا کی ایسی ہو کہ ج (لا) کو معدوم کر دی اسکی یہیہ معنی ہیں کہ مساوات ج (لا) = - کی ایک اصلی قیمت ہے  
 اب ہم یہہ درپا کر سکتی ہیں کہ بہر قیمت مثبت ہوگی یا منفی ہو اسلیٰ کہ جب لا کی واسطی صفحہ کہیں  
 تو ج (لا) کی علامت وہی ہوگی جو ع - لا کی علامت ہی پس اگر ع - لا اور ع - لا کی ایک ہی علامت ہو  
 تو ع - لا قیمت ہی تو مساوات ج (لا) = - کی یعنی ایک منفی قیمت ہوگی اور اگر ع - لا اور ع - لا  
 کی مختلف علامتیں ہوں تو ع - لا ایک مقدار منفی ہوگی اسواسطی یعنی ایک مثبت قیمت مساوات  
 ج (لا) = - کی ہوگی پس اگر مساوات طاق درجہ کی ہو اور سب کے لا کی اعلیٰ قوت کی مثال پر  
 مساوات کو تفہیم کر کے سادی صورت اسکی بنائیں تو ایک اصلی قیمت مساوات ہوگی جسکی





ج (۱۱) = ۰ کے صرف ایک ہی مثبت قیمت ہے

(۲۳) کسی طرح متساوی نہ لگی اسلی ہی ہم آخر میں دفعت کے نیا ج کو نہایت صفائی اور درستی کے ساتھ لکھیں۔  
 دفعہ ۲۰ میں جس مساوات کا ذکر ہی واسطی بہہ ثابت ہوا ہی کہ واسطی کم از کم ایک اصلی قیمت ہوتی ہے  
 مگر بہہ نہیں ثابت ہوا کہ وہ صرف ایک ہی ہوتی ہی دفعہ ۲۱ میں جس مساوات کا بیان ہوا ہی واسطی  
 بہہ ثابت ہوا ہی کہ واسطی کم از کم دو اصلی قیمتیں ہوں گیں مگر بہہ نہیں ثابت کیا کہ صرف دو ہی اصلی قیمتیں ہوں گیں  
 دفعہ ۲۲ میں جس مساوات کا ذکر ہی واسطی میں ثابت ہوا ہی کہ ایک مثبت قیمت واسطی ہوتی ہی اور بہہ ثابت  
 ہوا ہی کہ صرف ایک ہی قیمت ہوتی ہی مگر بہہ نہیں ثابت ہوا کہ کوئی واسطی منفی قیمت نہیں ہوتی

(۲۴) دفعات ۲۰، ۲۱ و ۲۲ میں جو متعدد ثابت ہوئی ہیں ان میں خاص صورتوں کے اندر  
 قیمتوں کا وجود موقوف اس امر پر رکھا گیا ہے کہ ہم اس بات کو ثابت کریں کہ

ج (۱۱) کی ہلکی دفعہ علامت بالکی دفعہ علامت بدلتی ہی اگر برخلاف اسکے ایسی صورت ہو کہ  
 خاص سلک قیمتوں کی ایسی ہو کہ ہم بہہ ثابت کریں کہ ج (۱۱) کی علامت موافق اس سلک کے  
 نہیں تبدیل ہوتی تو کوئی قیمت مساوات ج (۱۱) = ۰ میں اس سلک میں لاکھی واسطی نہ ہوگی  
 اب اس دعویٰ کی ظاہر صورتیں ذیل میں لکھتی ہیں

(۱) اگر مثال ج (۱۱) کی سب مثبت ہوں تو مساوات ج (۱۱) = ۰ کی کوئی مثبت قیمت نہ ہوگی

(۲) اگر ج (۱۱) میں لاکھی زوج قوائی مثال کیساں علامت رکھیں اور لاکھی طاق قوتوں کی  
 سب مثال پہلی علامت کی متضاد علامت رکھیں تو مساوات ج (۱۱) = ۰ کی کوئی منفی قیمت نہ ہوگی  
 (۳) اگر لاکھی صرف زوج قوائی ج (۱۱) ملحق ہو اور تمام مثال کی کیساں علامت ہو تو مساوات

ج (۱۱) = ۰ کی کوئی اصلی قیمت نہیں ہوگی

(۴) اگر صرف لاکھی طاق قوائی ج (۱۱) ملحق ہو اور تمام مثال کی کیساں علامت ہو تو

مساوات ج (۱۱) = ۰ کی کوئی اصلی قیمت نہیں ہوگی الا اس صورت میں کہ لا = ۰

ہم خود آخر صورتوں میں بہہ لکھا ہی کہ مساوات کی اصلی قیمت کوئی نہیں ہوگی مگر بہہ ہم پہلی لکھا کہ

کوئی قیمت اسکی نہیں ہوگی اسواسطی کہ اس بات کو ہم جبر مقابله کی محیسوبن باب میں چاہی ہیں کہ  
باتفاق جہو رسادات بعض صورتوں میں ایسی ہوتی ہی کہ اسکی قیمت تخیلی ہوتی ہے

## باب دوم وجود قیمت کی بیان میں

(۲۵) ہم ثابت کر چکے کہ ہر ایک رسادات صحیحہ ناطقہ کی ایک قیمت ہوتی ہی خواہ وہ اصلی ہو خواہ خیالی

یعنی اس صورت ۱ + ب - ۱ کی آئین ۱ اور ب اصلی ہیں ایسی جملہ ۱ + ب - ۱

کو جس میں ۱ اور ب اصلی ہوں جملہ خیالی کہتی ہیں اسکی یہ معنی ہیں کہ جب ہم لفظ خیالی کا کسی جملہ کو استعمال میں  
لائیں تو اسی مراد یہ ہوتی ہی کہ وہ جملہ ۱ + ب - ۱ کی صورت کا ہی اور اس میں ۱ اور ب اصلی ہیں

(۲۶) طالب علم اس بات کو جانتی ہیں کہ بعض باتیں باتفاق جہو رسایں مقرر ہوتی ہیں کہ حکم سب سے

ہم تحقیقات جبر میں خیالی جملوں کے تحت کر سکتی ہیں اور انکی باب میں بعض مسائل قائم کر سکتی ہیں

مثلاً ۱ + ب کی جذر کی مثبت قیمت قالب ہر ایک جملہ ۱ + ب - ۱ اور ۱ - ب - ۱ کا کھنڈا ہے

اور اس حدود کی استعانت سے یہ ہم ثابت کر سکتی ہیں کہ دو خیالی جملوں کی حاصل ضرب کا قالب

ان دو جملوں کی قالبوں کا حاصل ضرب ہوتا ہی

اسواسطی کہ حاصل ضرب ۱ + ب - ۱ اور ۱ + ب - ۱ کا

۱ - ۱ + ب + ۱ + ب - ۱ اور قالب انکا مثبت قیمتہ جذر (۱ - ۱ + ب + ۱ + ب - ۱) کا

کی یعنی (۱ + ب) (۱ + ب) کی ہی اور اسکی ہی معنی ہیں کہ دو معلوم جملوں کے قالبوں

کا حاصل ضرب یہ قالب ہے

اور نیز جملہ ۱ + ب - ۱ اس حالت میں معدوم قرار دیا گیا ہی کہ ۱ اور ب معدوم

ہو جائیں پس اب یہ ثابت ہوا کہ اگر حاصل ضرب دو خیالی جملوں کا معدوم ہوتا، تو ایک جملہ

کا قالب بھی معدوم ہو جائی ہی اور ایسی ہی اگر حاصل ضرب دو یا زیادہ خیالی جملوں کا معدوم ہوتا ہے

تو خود ایک جملہ بھی معدوم ہوتا ہی اور اگر ایک خود جملہ معدوم ہو جائے، تو اسکا حاصل ضرب بھی معدوم ہو جائے

(۲۷) جن طالب علموں نے خیالی جملوں پر توجہ نہ کی ہو اب وہ جبر مقابله کی محیسوبن باب کو دیکھیں

اب ایک بات بہت مشکل ہم ثابت کرتی ہیں کہ ہر ایک مساوات ایک قیمت رکھتی ہی خواہ وہ قیمت اصلی ہو یا خیالی ہو + یہ بہتر معلوم ہوتا ہے کہ بالفصل طالب علم اس امر کو یوں ہی تسلیم کر لی اور اگی کام چلائی اور اس باب کو اگی چوڑی اور پیچیدہ کچھ اس سا کہ کو پڑھ لی تو پھر اس کو مطالعہ کری اول اس مسئلہ کے سمجھنی میں دقت نہ اٹھائی

(۲۸) اول ہم یہ ثابت کرتی ہیں کہ چاروں معادلات ذیل میں ایک ایک قیمت وجود رکھتی ہے خواہ وہ قیمت اصلی ہو یا خیالی

$$\begin{array}{l} 1 = 1 \quad 1 - 1 = 0 \quad 1 + 1 = 2 \quad 1 - 1 = 0 \end{array}$$

(۱)  $1 = 1$  میں ظاہر ہے کہ  $1 = 1$  ایک قیمت مساوات کی ہے

(۲)  $1 - 1 = 0$  اگر ن طاق عدد ہو تو ظاہر ہی کہ  $1 - 1 = 0$  کی ایک قیمت مساوات کی ہوگی

اگر ن زوج ہو تو اس کو برابر  $2$  م کی فرض کرو تو یہ ثابت کرنا ہو گا کہ مساوات  $1 - 1 = 0$

کا ایک حل ہی اور اسکی معنی یہی ہیں کہ ہم یہ ثابت کر دین کہ مساوات  $1 - 1 = 0$

کا ایک حل ہی اسکی اسکا حل ہی باقی دو ذیل کی مساواتوں کی حل میں داخل ہو گیا

(۳)  $1 + 1 = 2$  اگر ن طاق ہو تو اسکی دو صورتیں  $1 + 1 = 2$  اور  $1 + 1 = 2$  کی ہوں گیں

اول صورت میں  $1 + 1 = 2$  ایک قیمت ہی اسکی کہ  $(1 + 1) = 2$

اور دوسری صورت میں  $1 - 1 = 0$  ایک قیمت ہوگی کیونکہ  $(1 - 1) = 0$

اگر ن ایک جفت عدد ہی تو فرض کرو کہ وہ  $2$  م کی برابر ہی ہیں م ایک طاق عدد ہی اور  $1$  کوئی بھی قیمت

$2$  کی مثلاً  $2$  ہی  $1 + 1 = 2$  کی رکھو تو مساوات  $1 + 1 = 2$  کو اس طرح لکھ سکتے ہیں کہ

$1 + 1 = 2$  اور یہی ہم ثابت کر ائی ہیں کہ  $1 + 1 = 2$  ایک مناسب قیمت کی ہی

اگر  $2$  م کی صورت  $1 + 1 = 2$  ہو اور  $1 + 1 = 2$  ایک مناسب قیمت کی ہے

اگر  $2$  م کی صورت  $1 + 1 = 2$  کی ہو اب ہم کو لاکی قیمت ایسی دریافت کرنی باقی رہی کہ

جسی شرائط  $1 + 1 = 2$  اور  $1 - 1 = 0$  کی پوری ہوں آئیں  $1 + 1 = 2$





بشرطیکہ عمر + در صفر نہ ہو

اب ہم اول یہ فرض کرتی ہیں کہ عمر + در صفر نہیں ہی تو علامت  $ع^۱ + ق^۱ - ع^۲ - ق^۲$  وہی علامت ہے جو علامت  $\neq ۲$  (عمر + در صفر) ہذا کی جسمین لاکافی چھوٹا مقرر کیا گیا ہے اور ہم اس بات کو یقینی جان سکتی ہیں کہ یہ علامت منفی ہو جب اس فرض کے ہوگی کہ

اگر عمر + در مثبت ہو تو طر  $\neq ۱$  اور اگر عمر + در منفی ہو تو طر  $\neq ۱$

پس اس واسطی  $ع^۱ + ق^۱$  کو چھوٹا  $ع^۲ + ق^۲$  سے کر سکتی ہیں

دوم یہ فرض کرو کہ عمر + در صفر ہی تو بجای طر  $\neq ۱$  کے

فرض کرنی کی طر  $\neq ۱$  فرض کرو اور یہ موافق سابق کی عمل کرو تو یہ حاصل ہوگا کہ

$$ع^۱ + ق^۱ = ۱ - (ع + ق) \neq ۱ - (ع + ق) \text{ ہذا } ۱ - ۱ + \dots$$

$$\text{پس } ع^۱ = ع + ص ہذا + \dots$$

$$ق^۱ = ق + م ہذا + \dots$$

$$\text{اور } ع^۱ + ق^۱ = ق^۱ + ع^۱ \neq ۲ \text{ (فرم - عر ص) ہذا } + \dots$$

اس میں ارقام جن میں ہذا سے بد کے اعلیٰ قوتیں ملتے ہوں نہیں لکھی ہیں

$$\text{اب (عمر + در صفر) + (فرم - عر ص) = (ع^۱ + ق^۱) (ع^۲ + ق^۲)}$$

اور یہ برابر صفر کی نہیں ہو سکتا اس واسطی کہ  $ع^۱ + ق^۱$  موجب فرض کے برابر صفر کی نہیں ہے اور طر

ثابت ہو چکا ہے کہ سوار صفر کے ہی پس اس سبب کہ عمر + در صفر ہے

فرم - عمر صفر نہیں ہی اس واسطی علامت  $ع^۱ + ق^۱ - ع^۲ - ق^۲$  کے علامت وہی ہوگی جو

علامت  $\neq ۲$  (فرم - عر ص) ہذا کی ہی جسمین ہذا کی چھوٹا فرض کیا گیا ہے اور ہم اس

بات کو یقینی جان سکتی ہیں کہ یہ علامت منفی ہو جب اس فرض کی ہوگی کہ اگر فرم - عمر مثبت ہو تو

طر  $\neq ۱$  اور اگر فرم - عمر منفی ہو تو طر  $\neq ۱$  ہذا ہو اس واسطی ہم

$ع^۱ + ق^۱$  کو چھوٹا  $ع^۲ + ق^۲$  سے فرض کر سکتے ہیں

پس ہم نے اس طرح یہ ثابت کر دیا کہ  $لو + مو$  کی قیمت جب مختلف صفری ہو تو ہم اس قیمت کو اس طرح لکھ سکتے ہیں کہ  $لا$  کی بجائی جو جملہ رکھا جاوے گا  $ا$  اور  $ب$  ایک سب سے بڑا عدد یعنی  $لو + مو$  قابل ہے نہیں ہے کی کوئی مثبت قیمت اس کی ایسی ہو کہ وہ گھٹ نہ سکی جو کچھ ہم نے بیان کیا اور معلوم ہوا کہ یہ ممکن ہے کہ  $لو = ۱۰$  اور  $مو = ۵$  کے ایک ہی دفت میں ہو سکتی ہیں

(۳۰) اب یہ ثابت کرنا باقی رہا کہ  $ا$  اور  $ب$  جملہ  $۱ + ب$  اور  $۱ + ا$  میں جولا کی بجائی مندرجہ کرنے سے  $ج (لا)$  کو معدوم کرنا ہی متناہی ہے

$$ج (لا) = ع (لا) \left\{ ۱ + \frac{۱}{ع (لا)} + \frac{۲}{ع (لا)} + \dots + \frac{۲}{ع (لا)} + \frac{۱}{ع (لا)} \right\}$$

اب بجائی  $لا$  کے  $ا + ب$  اور  $۱ + ب$  اور  $۱ + ا$  کی یہ صورت ہو گی کہ

$$ع (ا + ب) = ۱ + ع (ا + ب) + \frac{۲}{ع (ا + ب)} + \dots + \frac{۲}{ع (ا + ب)} + \frac{۱}{ع (ا + ب)}$$

اب جو سلسلہ خطوط وحدانی کی درمیان ہی اوپر کی کسی رقم کو مثلاً اس رقم کو حسین ع دقت ہو کر تو یہ حاصل ہو گا کہ

$$\frac{ع (ا + ب) = ۱ + ع (ا + ب) + \frac{۲}{ع (ا + ب)} + \dots + \frac{۲}{ع (ا + ب)} + \frac{۱}{ع (ا + ب)}}{ع (ا + ب) = ۱ + ع (ا + ب) + \frac{۲}{ع (ا + ب)} + \dots + \frac{۲}{ع (ا + ب)} + \frac{۱}{ع (ا + ب)}} = ۱ + ب + ا - ۱$$

اب یہ ظاہر ہے کہ جب  $ا + ب$  غیر متناہی زیادہ ہوتی ہیں تو اور  $س$  غیر متناہی کم ہونے میں پس جب  $لا = ا + ب$  کے ہو تو  $ج (لا)$  کی قیمت کو  $لو + مو$  کے تعبیر کرنے سے یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$لو + مو = ۱ + ع (ا + ب) + \frac{۲}{ع (ا + ب)} + \dots + \frac{۲}{ع (ا + ب)} + \frac{۱}{ع (ا + ب)}$$

اور  $ب$  اور  $ا$  کی غیر متناہی زیادہ ہوتی ہی  $ا$  اور  $ب$  لانا نہایت کم ہوتی ہیں اور یہ بھی کم کو حاصل ہو گا کہ

$$لو - مو = ۱ + ع (ا - ب) + \frac{۲}{ع (ا - ب)} + \dots + \frac{۲}{ع (ا - ب)} + \frac{۱}{ع (ا - ب)}$$

$$پس لو + مو = ع (ا + ب) + \frac{۲}{ع (ا + ب)} + \dots + \frac{۲}{ع (ا + ب)} + \frac{۱}{ع (ا + ب)}$$

اور یہ  $لا$  انتہا زیادہ ہونا چاہئے اور  $لا$  انتہا زیادہ ہوں کیونکہ ایک جز صریح  $(ا + ب)$





اور ایک اور جزئی ع ہوگا کیونکہ مثالی لا کے ج (لا) میں ع سے پس

ج (لا) = ع (لا - ۱) (لا - ۲) (لا - ۳) . . . (لا - ۱۸)

اسی معلوم ہوا کہ مساوات ج (لا) = کی قیمتیں ہیں کیونکہ ن مقدار

۱۸ اور ۲۰۰۰ میں سی کوئی مقدار بجائی لا کی ج (لا) میں رہیں تو وہ اسکو معدوم

کردگی اور مساوات کی قیمتوں سے زیادہ کوئی قیمت نہ ہوگی اسلی کہ اگر لاکے کوئی اور قیمت

ن جو قیمتوں ۱۸ اور ۲۰۰۰ میں سی نہ ہو مقرر کریں تو ج (لا) بہم ہو جائیگا

کہ ع (س - ۱) (س - ۲) (س - ۳) . . . (س - ۱۸)

اب یہ صفر نہیں ہو سکتا اسلئے کہ ہر ایک جزئی ایک مختلف صفر ہی اور حاصل ضرب باہر جزئی کا

خواہ اصلی ہو یا جیائی ہو معدوم نہیں ہو سکتا جب تک کہ کوئی جزئی خود معدوم نہ ہوتا ہو دفعہ ۲۲ کو دیکھو

(۳۴) دفعہ گذشتہ میں تمام قیمتیں کیا اصلی ہو گئیں یا اس صورت ۱ + ب + ۳ کی اس میں اور اصلی

میں اور بعض قیمتیں ۱۸ اور ۲۰۰۰ میں برابر ہی ہو سکتی ہیں اسلی کہ چہ ضرور نہیں کہ درجہ کی

مساوات کی مختلف قیمتیں ہی ہوں شاید طالب علم اس بات پر متاثر نہ ہو کہ درجہ کی مساوات

کی قیمتیں کس طرح ہو سکتی ہیں جب کہ اول کا اسپین مختلف ہونا ضرور نہ ہو تو ہم یہ کہتی ہیں کہ

اسپین بڑی سانی ہی کہ درجہ کی مساوات کی قیمتیں کہی جائیں گے اور ان میں بعض قیمتیں

اسپین برابر ہوں جس کا کہ جبر مقابلہ میں مساوات درجہ دوم ۱ + ب + ۳ = میں بیان کیا گیا ہے

کہ جب ب = ۴ ج تو اسکی دو برابر قیمتیں گنتی میں نسبت ایک قیمت گنتی کی سانی ہے

(۳۵) اب جو ہم فی مکان مساوی قیمتوں کے داخل ہونی کا بیان کیا اسکا اثر دفعات گذشتہ میں

صرف ایک دفعہ ۲۲ پر ہوتا ہی اس دفعہ میں یہ ثابت کیا ہی کہ مساوات خاص صورت کی مختلف

ثبت قیمتیں نہیں ہو سکتیں لیکن اس بات کو اثبات میں نہیں ثابت کیا ہی کہ جس قیمت کا ہونا ضرور ہوگا

اسکی برابر ایک قیمت یگی قیمتوں کا ہونا ممکن نہیں جب ہم دس کا رٹیر حسب کا قاعدہ علامہ ثابت

کرینگے اور وقت یہ بات ظاہر ہو جائیگی کہ مساوات جب پر بحث کی گئی ہو، ایک قیمت گنتی ہی اور وہ نہ نہیں







صہ ۱-۲ کی ہفت فوٹن اصلی قیمتیں پیدا کرینگے اور ۱-۲ صہ کا تعلق طاق قواد ساتھ ہوگا

اور چونکہ ج (لا) کی امثال سب اصلی مانی گئی ہیں ۱-۲ کا

کسی طرح سواء صہ کے طاق قواد کے نہیں واقع ہو سکتا

پس اگر سہ - صہ ۱-۲ بجای لا کی ج (لا) میں رکھا جائے تو وہ حاصل حاصل ہوگا

جو لا کی جگہ سہ + صہ ۱-۲ کی رکھنی حاصل ہوا تھا مگر او میں صہ کی علامت بدلی ہوئی ہوگی

اسی واسطی حاصل ع - ق صہ ۱-۲ ہوگا پس اگر سہ + صہ ۱-۲ ایک قیمت ج (لا) =

کی ہو تو چاہی کہ ع = اور ق = کے ہو مٹائی مساوات

ع - ق صہ ۱-۲ برابر صفر کے ہوگا اس واسطی سہ + صہ ۱-۲ ابھی ایک قیمت مساوات

ج (لا) = کے ہوگی

(۲۲) اگر ج (لا) ایک جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا ہو اور او میں امثال اصلی ہوں اور ایک جز ضربی او سکا

لا - ۱ ہو اور او میں ۱ = سہ + صہ ۱-۲ کے ہو تو او سکا دوسرا جز ضربی

لا - ۱ ہوگا جس میں ۱ = سہ - صہ ۱-۲ ہوگا اور حاصل ضرب ان دو اجزاء ضربی

لا - سہ - صہ ۱-۲ اور لا - سہ + صہ ۱-۲ کا (لا - سہ) + صہ یعنی

لا - ۲ سہ لا + سہ + صہ ہی یعنی حاصل ضرب ایک اصلی درجہ دوم کا جز ضربی ہے

(۲۳) پس ہم کو پہنچے حاصل ہوگا کہ ہر جملہ صحیحہ ناطقہ لا کو جس میں سب اصلی امثال ہوں یوں خیال کر سکتے ہیں

کہ وہ حاصل ضرب اصلی اجزاء ضربی کا ہی خواہ وہ اول درجہ کی ہوں یا درجہ دوم کی ج (لا)

اس صورت کا ہوگا کہ (لا - ۱) (لا - ۲) (لا - ۳) ... (لا - ک) مج (لا) اس میں

۱ اور ب اور س - - - ک سب اصلی قیمتیں ج (لا) = کی ہیں اور ج (لا) وہ جملہ ہے جس میں

حاصل ضرب درجہ دوم کی اجزاء ضربی کا ہی اور اس کی علامت نہیں بدل سکتی

(۲۴) دفعہ ۴ کی طرح یہ دعویٰ بھی ثابت ہو سکتا ہے کہ اگر ج (لا) جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا ہو اور امثال ہی

او سکی ناطقہ ہوں اور مساوات ج (لا) = کی قیمت ۱ + ۱ + ۱ کے صورت کے ہو تو









ایک قیمت رہی دین اور اس ایک قیمت کو دریافت کر لیں لیکن جب ہم اور قیمتوں کو مساواتوں سے دور کرتے ہیں تو مساوات مفروضہ ہی خود ہم کو دوبارہ حاصل ہو جاتی ہے اس واسطے کچھ فائدہ نہیں ہوتا مثلاً مساوات

$$ا + ع + لا + ع + لا + ع + م = ۰ \text{ کے ہو}$$

اور اس کے قیمتیں ادب وج فرض کرو تو

$$۱ - ب - ج = ع$$

$$ا ب + ب ج + ج ا = ع م$$

$$۱ - ب ج = ع م$$

ا ب ب اور ج کی دور کر کے ایک مساوات ایسی حاصل کرتے ہیں کہ جس میں فقط ا ہی ہو تو اس کی سب سے زیادہ ہاں نہ کر کے یہاں کہ ان تین مساواتوں میں اول مساوات کو ا میں ضرب دو اور دوسرے مساوات کو ا میں اور تیسرے مساوات کی ساتھ حاصل کو جمع کرو تو یہ حاصل ہو گا کہ

$$۱ - ا ب - ا ج + ا ب + ا ج + ج ا - ا ب ج = ع ا + ع م + ع م$$

$$\text{یعنی } ۱ + ع ا + ع م + ا + ع م = ۰$$

اب یہاں مساوات جو حاصل ہوئی وہی ہے جو مساوات مفروضہ تھی فقط فرق اتنا ہی کہ لا کی جگہ ا ہی اور یہاں ب ج بھی کہ مشکل نہیں ہے کہ ارتباطات مذکور سی جب ہم ب اور ج کو دور کیا تو ایک مساوات تیسری درجہ کی حاصل ہو گئی ہم کو اسی مساوات کے حاصل ہونے کی توقع تھی کیونکہ حروف ا اور ب اور ج قیمتوں کو تعبیر کرتے ہیں اور ان میں باہم کچھ تمیز نہیں ہے اسلئے جو مساوات ا کی استخراج کر نیکی ا میں ا کی تین قیمتیں ہونگی کیونکہ

مساوات کی قیمتوں قیمت میں سی ہر ایک قیمت ہو سکتا ہے پس اسی ہم کو خوب نصرت ہو گیا کہ امثال مساوات اور اس کے معلوم قیمتوں میں جو ارتباطات باہمی ہونگی ان پر جو اعمال جریہ اس نظر سے کی جائیں کہ اور قیمتیں سوا ایک کے دو ہونگی ان سے مساوات مفروضہ پیدا ہوگی

(۷۶) دفعہ ۴ میں جواز ثباطات بیان ہوئی کہ اوئسی قیمتیں مساوات کی نہیں ہوتیں جو کہ

مگر اور بڑی بڑی نیاچ اوئسی مساوات کے باب میں مستنبط ہوتے ہیں

مثلاً ۱ و ۲ ... ان قیمتیں مساوات

$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ = ۵۵$$

$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ = ۵۵$$

$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ = ۵۵$$

$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ = ۵۵$$

یعنی ۱ - ۲ برابر ہی مساوات مفروضہ کی قیمتوں کی مجذوروں کی پس اگر مساوات

۱ - ۲ منفی ہو تو نام قیمتیں مساوات کی اصلی نہیں ہوں گیں

(۷۸) موافق دفعہ سابق کی اور ارتباطات بھی قیمتیں ملتے ہوں مستنبط کر سکتی ہیں

مثلاً (۱ - ۲) = ۱ - ۲ = ۱ - ۲ قیمتوں کے حاصل ضرب کے مجموعہ کے

$$(۱ - ۲) = ۱ - ۲ = ۱ - ۲$$

اسی واسطے تقسیم کرنے سے

$$\frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۷} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۱۰} = \frac{۱۰۵}{۲۵۲۰}$$

= مجموعہ قیمتوں شکافیہ یا مقلوبہ کے

$$\frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۷} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۱۰} = \frac{۱۰۵}{۲۵۲۰}$$

$$\frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۷} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۱۰} = \frac{۱۰۵}{۲۵۲۰}$$

$$\frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۷} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۱۰} = \frac{۱۰۵}{۲۵۲۰}$$

باب چہارم تبدیلیت معادلات

(۷۹) عموماً مضمون اور مطلب ایک کا یہ ہے کہ مساوات معلوم سی ایک اور ایسی مساوات

مستنبط کریں کہ جب کی قیمتیں مساوات معلوم کی قیمتوں سی ایک ارتباط خاص کرتے ہوں

جس کا ایک دیکھنے کو ہم یہ معلوم ہو گا کہ بہت سی تبدیلیاں مساوات معلوم کی بغیر اس کی قیمتوں کے معلوم ہونی کی ہوسکتی ہیں اور مثالوں میں معلوم ہو گا کہ یہ تبدیلیاں مساواتوں کی حل کرنے میں کام آتی ہیں (۵) ایک مساوات کی بہت بدل کر دوسری مساوات ایسی بنا دو کہ اس کی قیمتوں کے متعلق بدل جائے فرض کرو کہ  $C = 10$  مساوات ہی اور  $2 = 10$  کے ایسا مقرر کرو کہ

جب لاکھ کوئی خاص قیمت ہو تو اس کی وہی قیمت تعداداً ہو مگر علامت اس کی متضاد ہو  
 پس لا = - اور مساوات مطلوب ج (-) = ۰ کے ہے

$$\text{الکرج (۱۵)} = \text{ع} + \frac{\text{ع}}{۲} + \frac{\text{ع}}{۳} + \dots + \frac{\text{ع}}{۱۰} + \frac{\text{ع}}{۱۱}$$

مساوات ج (-) =

$$\begin{aligned} & \cdot = \text{ع} \cdot (-\text{ع} + \text{ع}^1 - \text{ع}^2 + \dots - \text{ع}^n + \text{ع}^{n+1}) \\ & \cdot = \text{يعني ع}^0 \cdot \text{ع}^1 - \text{ع}^2 + \text{ع}^3 - \dots + \text{ع}^n - \text{ع}^{n+1} \cdot \text{ع}^n \end{aligned}$$

پس اسی معلوم ہوا کہ مساوات معلومہ کے ثبوت کو اگر اس طرح بدلیں کہ دوسری رقم سی شروع کر کے ہر ایک رقم کی علامت کو بدل دیں تو مساوات مطلوب حاصل ہو جائیگی

(۵۱) دفعہ گذشتہ کی اخر میں جو قاعدہ بیان ہوا اسی اور سمیع مساوات مفروضہ کی اندر تمام رقمیں مفروضہ فرض کی گئیں ہیں جو اس وجہ کی مساوات میں واقع ہوا کرتی ہیں یعنی مثلاً کو صفر نہیں فرض کیا اب اگر کوئی ایسی مثال ہو کہ جس میں یہ بات نہ پائی جائی مثلاً یہ مساوات ہو کہ

$$= 6 + 4N - 5N - 8r + 4$$

اسکو ایسی دات میں تبدیل کرنا ہوگا جسکی قیمتیں باعتبار کمیت کی تو دہی ہوں اس دات کی قیمتیں ہر ہر گروہ میں ہوں

لا = دکی رکھو تو یہ چل ہو گا کہ

$$\cdot = 6 + 5N + 5N + 5N - 4$$

اگر ہم چاہیں تو اصل مساوات کو اس طرح لکھیں کہ

$$= 6 + 9x - 5x^2 + 5x - 5x^2 + 0x + 0$$

نو بموجب قاعدہ دفعہ ۵۰ کے مساوات کے مثبت بدل کر یہ مساوات حاصل ہوگی کہ

$$۶ - ۳x + ۲x + ۲x + ۲x + ۲x + ۲x + ۲x + ۲x + ۲x = ۰$$

$$۶ - ۳x + ۲x + ۲x + ۲x + ۲x + ۲x + ۲x + ۲x + ۲x = ۰$$

یعنی

اور یہی مساوات سابق میں حاصل ہوئی تھی

مساوات میں جب وہ سب فیق واقع ہوں جو اس درجہ کی مساوات میں واقع ہوتی ہیں یعنی کوئی مثال صفر نہ ہو تو ہم اسکو مساوات کامل کہتی ہیں اور کہی کہی اسی ہی کام بہت نکلتا ہے کہ مساوات کامل موافق حکمت مذکورہ کی بنالین یعنی جو فیق نہوں انکو لکھ لیں اور مثال او میں سے ہر ایک کی صفر بنائیں (۵۲) ایک مساوات کی ہٹت بدل کر دوسری مساوات ایسی بناؤ کہ جسکی قیمتیں مساوات مفروضہ کے

قیمتوں سے کچھ خاص گنی ہو یعنی خاص ضعاف ہوں یا اجزا

فرض کرو کہ (لا) = مساوات مفروضہ اور مطلوب یہ ہے کہ اس مساوات کی ہٹت بدل کر دوسرے مساوات ایسی بنائیں کہ جسکی قیمتیں ک گنی مساوات مفروضہ کی قیمتوں سی ہو  
 $۵ = ۰$  کے مقرر کر دو جب لاکوئی خاص قیمت ہو تو  $۵$  کی قیمت ک گنی ہوگی

پس لا =  $۵$  اور مساوات مطلوب ج (۵) ہے

(۵۳) مثلاً اس مساوات

$$۵ - ۳x + ۲x + ۲x + ۲x + ۲x + ۲x + ۲x + ۲x + ۲x = ۰$$

ہٹت بدل کر دوسرے مساوات بناؤ جسکی قیمتیں ک گنی ہوں لا =  $۵$  کے رکھو

اور ہر ک میں سب کو ضرب دو تو یہ حاصل ہوگا کہ

$$۱۰ - ۶x + ۴x + ۴x + ۴x + ۴x + ۴x + ۴x + ۴x + ۴x = ۰$$

اس مثال سی ہم بتلائینگے کہ اس تبدل ہٹت کو کن کام میں لاسکتی ہیں مساوات مفروضہ میں سب مثال صحیح نہیں ہیں تو ہم ک کی مناسب قیمت فرض کر کے مساوات کی ایسی ہٹت بدل کر

دوسری مساوات پیدا کر سکتی ہیں کہ جہین سب مثال صحیح اعداد ہوں

مثلاً  $4 = 4$  کے فرض کرو تو مساوات بدل کر

$$3 - 4 + 2 = 4 - 5 + 3 = 0 \text{ ہو جائینگے}$$

عموماً یہ فرض کرو کہ مساوات

$$a + b + c + \dots + n = 0 \text{ ہو}$$

اب اگر ہم  $a = 0$  کی فرض کریں اور سب کو  $a$  میں ضرب دیں تو مساوات اس طرح پیدا ہوگی

اوسمین تمام امثال کی صحیح اعداد ہونی کی واسطی فقط اس بات کا تحقیق کرنا ضروری ہے کہ ہر ایک رقم

ع  $a$  کی واسطی ہر ایک جز ضربی بنائیں جو  $a$  کی نسبت میں واقع ہو کم از کم اوسکی اعلیٰ قوت کے ہیں واقع ہو

(۵۴) ایک مساوات کی ہیت بدل کر دوسری مساوات ایسی پیدا کرو کہ اوسکی قیمتیں مساوات مفروض کے

قیمتوں سی بقدر ایک مقدار مستقل کی جدا گانہ ہوں

فرض کرو کہ  $a = 0$  مساوات مفروضہ ہو اور یہ مطلوب ہے کہ اس مساوات کی ہیت بدل کر

دوسری مساوات ایسی پیدا کریں کہ اوسکی قیمتیں مساوات مفروضہ کی قیمتوں سی بقدر مقدار مستقل کے

کم ہوں  $a = 0$  کی ایسا مقرر کرو کہ جب  $a$  کی کوئی خاص قیمت ملے تو

قیمت کی اوسی بقدر کی کم ہو  $a = 0$  کے مساوات مطلوب ج  $a = 0$  ہے

بموجب دفعہ ۱۰ کے مساوات  $a = 0$  کو پہلا کو تو

$$a + b + c + \dots + n = 0 \text{ ج (ک) } + \frac{a}{2} \text{ ج (ک)} + \frac{a^2}{4} \text{ ج (ک)} + \dots + \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \text{ ج (ک)} = 0$$

پس اگر ج  $a = 0$  ع  $a + b + c + \dots + n = 0$  ع  $a + b + c + \dots + n = 0$  ع  $a + b + c + \dots + n = 0$

مساوات ج  $a = 0$  کو موافق قرار دے کر بقدر دفعہ ۱۰ کی بموجب دفعہ ۱۰ کی مرتب کریں تو

$$a + b + c + \dots + n = 0 \text{ ج (ک) } + \frac{a}{2} \text{ ج (ک)} + \frac{a^2}{4} \text{ ج (ک)} + \dots + \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \text{ ج (ک)} = 0$$

$$+ \frac{a^n}{n!} \text{ ج (ک)} + \dots + \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \text{ ج (ک)} + \dots + \frac{a^2}{4} \text{ ج (ک)} + \frac{a}{2} \text{ ج (ک)} + a \text{ ج (ک)} = 0$$

(۵۵) اگر ایک مساوات کی ہیت بدل کر دوسری مساوات ایسی پیدا کرنی ہو کہ جسکی قیمتیں مساوات

مفروضہ کی قیمتوں ہی بقدر ایک مقدار مستقل ہونے کی زیادہ ہونے کو ہم کو ترکیباً بقی بر عمل کرنا چاہی  
فرض کرو کہ مساوات ج (لا) = سی تعبیر ہو اور لا + ۵ = ۵ کے فرض کرو تو

لا = ۵ - ۵ اور مساوات مطلوب ج (د - ۵) = ۰ اب دفعہ گذشتہ کی نتیجہ میں - ۵  
بجای کی رکھو تو مساوات مطلوب حاصل ہو جائیگی اگر غور سی خیال کرو تو یہ بات دفعہ گذشتہ  
کی بیان میں ضمانت ثابت ہوگی اسلیئے کہ اس دفعہ میں ہم کچھ فرض نہیں کہ ک قطعی مثبت مقدار ہے ہو  
(۵۶) دفعہ ۴۷ جیسے تبدیل ہمت کو ہم فی حاصل کیا ہی اوسکا بڑا فائدہ یہ ہے کہ ایک مساوات  
مفروضہ میں سی جس رقم کو ہم تعین کریں معدوم ہو جائے

مثلاً اگر بدلی ہوئی مساوات میں دوسرے رقم کو معدوم کرنا چاہیں تو ہم ک کو ایسا مقرر کرتی ہیں  
کہ  $ع + ۱ + ن ع = ۰$

یعنی ک = -  $\frac{ن ع + ۱}{ع}$  ہو اور اگر ہم یہ چاہیں کہ بدلی ہوئی مساوات میں تیسری  
رقم نہ رہی تو ہم ک کو اس دوسرے درجہ کی مساوات سے دریافت کریں کہ  
 $ع + (ن - ۱) ع + ک + \frac{ن (ن - ۱) ع}{۲ \times ۱} = ۰$

اب بالعموم یہ ہے کہ بدلی ہوئی مساوات میں (ر + ۱) دین رقم نہ رہی  
تو ہم ک کو اس درجہ کی مساوات سے دریافت کریں کہ

$ع ک + ک ع + ۱ - \frac{ر (ر - ۱) ع}{۲} + ۲ - \frac{ر (ر - ۱) ع}{۲} + ۰ = ۰$   
اب ہم اگلی بیان کریں گے کہ مساواتوں کی حل کرنی میں بڑی سہانی کسی خاص رقم کی اڑا دیتی ہو جائے  
(۵۷) مثلاً مساوات لا - ۴ لا + ۴ لا + ۵ = ۰ کی ہمت بدل کر ایسی مساوات پیدا کرو کہ

اوسمیں دوسری رقم نہ ہو یہاں  $ع = ۱$  اور  $۱ - ۴ = ۳$  پس  $۳ = ۵$  اور مساوات مطلوب  
 $۰ = (۲ + ۳) ۴ - ۳ (۲ + ۳) ۴ + (۲ + ۳) ۵ = ۰$

یعنی  $۰ = ۳ - ۵۸ - ۳$   
اب پھر اس مساوات لا - ۴ لا + ۴ لا + ۵ = ۰ کی ہمت بدل کر ایک اور مساوات ایسی پیدا کرو







تو قیمتیں کی (ب-ج) اور (ح-ا) ہوگی پس بیت بدلی ہوئی مساوات  
مساوات مفروضہ اور مساوات = ۲ق + ۲ع - ۲ا - ۲ب کے لایے لاکے دور کرنی سی حاصل ہوگی  
اور بہ لادور اسطرح ہوگا کہ

$$۲ا + ۲ق + ۲ع = ۰$$

$$۰ = ۲ا + ۲(۲ق + ۲ع) - ۲ا - ۲ب$$

$$۰ = ۲ا + ۲(۲ق + ۲ع) - ۲ا - ۲ب$$

پس لا = ۲ق + ۲ع مساوات مفروضہ میں اس قیمت کو مندرج کر دو تو آخر کار یہ مساوات حاصل ہوگی

$$۰ = ۲ا + ۲(۲ق + ۲ع) - ۲ا - ۲ب$$

اسی معلوم ہوتا ہے کہ اگر ۲ق + ۲ع مثبت ہو تو موجب دفعہ ۲۰ کے بیت بدلی ہوئی  
مساوات کی قیمت ایک اصلی منفی ہوگی اور اس سبب مساوت مفروضہ کی دو خیالی قیمتیں  
ہونگیں کیونکہ یہی ایک زوج قیمتوں کا ہوگا تو  
بیت بدلی ہوئی مساوات کی ایک منفی قیمت پیدا کرے

اگر ۲ق + ۲ع ۳ صفر ہو تو بیت بدلی ہوئی مساوات کی ایک قیمت صفر ہوگی اور اس سبب  
مساوات مفروضہ کی دو برابر قیمتیں ہونگیں

(۲) مساوات ۲ا + ۲ع + ۲ق + ۲ب = ۰ کی بیت بدل کر ایسی مساوات پیدا کرو کہ

جسکی قیمتیں محذور مساوات مفروضہ کی قیمتوں کی تفاوت کا ہو

$$۲ا = ۲ب - ۲ق - ۲ع$$

$$۲ا = ۲ب - ۲ق - ۲ع$$

$$۲ا + ۲ق + ۲ع = ۰$$

$$۲ا + ۲ق + ۲ع = ۰$$

آخر مساوات کی ہر ایک قیمت مساوات مفروضہ کی ہر ایک قیمت سے موافق نظر کی بقدر ۲ کی زیادہ

اسو اسطی اخر مساوات کی قیمتوں کے مجذورون کا تفاوت وہی ہوگا جو مساوات مفروضہ کی قیمتوں کی مجذورون کا تفاوت ہی اور موافق مثال گذشتہ کی مساوات مطلوب یہی کہ

$$3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 210$$

$$\text{یعنی } 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 210$$

## باب پنجم دس کا رئیس کا قاعدہ علامات کا

(۴۱) دفعات ۲۱-۲۴ میں ہم فی مثالیں ایسی بیان کیں ہیں کہ جنسے ج (لا) کے

امثال کی تعلقات باہمی اور مساوات ج (لا) = کی قیمتوں کی صفت ذاتی معلوم ہوتی ہی

اب ہم اول چند حدود بیان کریں گے اور بعد ازاں مسائل عامہ کی تحقیقات لکھیں گے

(۴۲) اگر ایک مسلک رقام کی ہو اور ہر ایک رقم کی اول علامات + اور - سکوئی ایک ہو تو مفاد یہ

بالترتیب خیال کرنے میں جب ایک رقم کی وہی علامت ہو جو اسکی رقم قبل کی علامت ہے تو اسکو تیرا کہیں گے

اور جب ایک رقم کی علامت اپنی رقم قبل کی علامت سے مخالف ہو تو اسکو تغیر کہیں گے مثلاً

جملہ ۱-۳-۵-۷-۹-۱۱-۱۳-۱۵-۱۷-۱۹-۲۱-۲۳-۲۵-۲۷-۲۹-۳۱-۳۳-۳۵-۳۷-۳۹-۴۱-۴۳-۴۵-۴۷-۴۹-۵۱-۵۳-۵۵-۵۷-۵۹-۶۱-۶۳-۶۵-۶۷-۶۹-۷۱-۷۳-۷۵-۷۷-۷۹-۸۱-۸۳-۸۵-۸۷-۸۹-۹۱-۹۳-۹۵-۹۷-۹۹

اول تو تیرا ۱-۳-۵-۷-۹-۱۱-۱۳-۱۵-۱۷-۱۹-۲۱-۲۳-۲۵-۲۷-۲۹-۳۱-۳۳-۳۵-۳۷-۳۹-۴۱-۴۳-۴۵-۴۷-۴۹-۵۱-۵۳-۵۵-۵۷-۵۹-۶۱-۶۳-۶۵-۶۷-۶۹-۷۱-۷۳-۷۵-۷۷-۷۹-۸۱-۸۳-۸۵-۸۷-۸۹-۹۱-۹۳-۹۵-۹۷-۹۹

اور جو تیرا ۱-۳-۵-۷-۹-۱۱-۱۳-۱۵-۱۷-۱۹-۲۱-۲۳-۲۵-۲۷-۲۹-۳۱-۳۳-۳۵-۳۷-۳۹-۴۱-۴۳-۴۵-۴۷-۴۹-۵۱-۵۳-۵۵-۵۷-۵۹-۶۱-۶۳-۶۵-۶۷-۶۹-۷۱-۷۳-۷۵-۷۷-۷۹-۸۱-۸۳-۸۵-۸۷-۸۹-۹۱-۹۳-۹۵-۹۷-۹۹

یہ ظاہر ہے کہ جب مساوات کامل ہو تو اسکی مجموعہ تو تیرا اور تغیر کی تعدادوں کا اوس عدد کی برابر ہوگا

جو مساوات کا درجہ بتلارہا ہے دفعہ ۱۵ دیکھو

اور اگر ہم کسی مساوات کامل میں - لا بجای لا کی رکھ دیں تو نئی مساوات میں صلی مساوات کا

تغیر تو تیرا نہ ہوگا اور تو تیرا تغیر ہو جائیگا مساوات ج (لا) = میں جو کامل نہ ہوں ج (لا)

اور ج (- لا) کی تغیرات کی تعدادوں کا مجموعہ ایسا عدد نہیں ہوگا کہ مساوات کی درجہ ہی ہوگا

وجہ اسکی یہی ہے کہ جب ج (لا) میں بعض ارقام معدوم ہوں تو یہ ممکن ہے کہ ج (لا) اور ج (- لا) کے

تغیرات کی تعداد کم ہو جائے مگر اسکا زیادہ ہونا ناممکن ہے

دس کارس کا قاعدہ علامت کا

اب پنجم ایک مسئلہ کا بیان کرتی ہیں اور اسکو ثابت بھی کرتی ہیں اسکو دس کارس کا قاعدہ علامت کا کہتے ہیں  
(۳۳) کسی مساوات میں خواہ وہ کامل ہو یا ناقص تعداد مثبت قیمتوں کی مثال کی تغیرات علامات کی  
تعداد سی زیادہ نہیں ہو سکتی اور کسی مساوات کامل میں تعداد منفی قیمتوں کی مثال کی تو اتنے  
علامات کی تعداد سی زیادہ نہیں ہو سکتی

اول ہم ثابت کرینگے کہ کسی کثیر الارقام جملہ کو ہم فرضی لا۔ میں ضرب دیں تو کم از کم  
حاصل ضرب میں ایک تغیر علامت بہ نسبت اصلی جملہ کے زیادہ ہو گا

مثلاً فرض کرو کہ ایک اصلی جملہ کثیر الارقام کی علامات ++ + - - - + - - - + - - - + ہیں  
اور اس کثیر الارقام کو جملہ ثنائی میں ضرب دیا جائے اور اسکی علامتیں + - ہیں اب اگر ان علامتوں  
کو لکھ کر عمل ضرب کا کریں تو یہہ حاصل ہو گا کہ

$$\begin{array}{r}
 + - - + - + - - - + + \\
 \hline
 + - - + - + - - - + + \\
 \hline
 + + - + - + + + - - - \\
 \hline
 - + - - + - + - - - + +
 \end{array}$$

دوہری علامت وہاں لکھی جہاں کہ حاصل ضرب میں علامت کی اندر اشتباہ تھا

اب یہاں یہہ قوانین نظر آتے ہیں  
(۱) اصلی کثیر الارقام میں ایک تو اسکی مقابل میں جدید کثیر الارقام میں سک مت مشتبہ کی قاعدہ  
اور دونوں میں تعداد علامات کی یکساں ہے

(۲) جدید کثیر الارقام میں علامت مشتبہ کی باقبل اور بالبعد کی علامات میں تضاد ہے

(۳) کثیر الارقام جدید میں آخر میں ایک تغیر زیادہ ہو گیا ہے

اب کثیر الارقام جدید میں ایک صورت ایسی لو کہ وہ سب سے زیادہ مخالف معلوم ہوتی ہو اور تمام علامات  
مشتبہ کی جگہ تو انرات کو رکھو تو جو بقانون دوم کی تو اسکی تعداد میں کچھ فرق ہی نہیں ہو گا  
علامت مشتبہ کی ہم اوپر کی علامت لین تو اصلی کثیر الارقام کی علامتیں کثیر الارقام جدید میں گزر

ایسی مگر جب تیسری قانون کی ایک تغیر علامات کا کثیر الارقام جدید کا آخرین زیادہ داخل ہو جائیگا پس جب ایسی صورت مخالف میں ایک تغیر علامت کا کثیر الارقام جدید میں بہ نسبت اصلی کثیر الارقام زیادہ ہو گیا تو او صورتوں میں کیوں نہ ہوگا

اب اگر ہم یہ فرض کریں کہ ایک مساوات کی منفی اور خالی قیمتوں کے موافق اجزاء ضربی کی حاصل ضرب کے ایک مثبت قیمت کی مطابق جز ضربی میں ضرب میں تو کم از کم ایک تغیر علامت کا اوس میں داخل ہو جائیگا اسبوا کسی مساوات میں تغیرات علامت کی تعداد سی زیادہ مثبت قیمتوں کی تعداد نہیں ہو سکتی اب دوسرے رئیس کے قاعدہ علامات کا دوسرا جز ثابت کرتی ہیں فرض کرو کہ مساوات کامل ہے

تو بجای لاکے - در کہنی ہی مثبت مساوات کی ایسی بدل جائیگی کہ اصل تو اس تغیر علامت اوس میں

بخائینگی اور اب اس بدلی ہوئی مساوات کی مثبت قیمتیں بہ نسبت تغیرات کی زیادہ نہیں ہو سکتیں

اور اسکی یہ معنی ہیں کہ اصلی مساوات کی منفی قیمتوں کی تعداد اوسکی تو اسر علامت کی تعداد زیادہ نہیں ہو سکتی

(۴۴) خواہ مساوات ج (لا) = ۰ کامل ہو یا نہ ہو اسکی قیمتیں بلحاظ کیفیت کے برابر مساوات

ج (- لا) = ۰ کے قیمتوں کی ہوتی ہیں مگر علامت میں مخالف یعنی منفی قیمتیں

ج (لا) = ۰ کی مثبت قیمتیں ج (- لا) = ۰ کی ہوتی ہیں خواہ مساوات کامل ہو یا نہ ہو

ج (- لا) = ۰ کی مثبت قیمتوں کی تعداد ج (- لا) کے تغیرات علامت کی تعداد

سی زیادہ نہیں ہو سکتی پس کل قاعدہ علامات کا اہر مختصر بیان ہو سکتا ہے کہ

ایک مساوات ج (لا) = ۰ کی مثبت قیمتیں تعداد میں ج (لا) کے تغیرات علامت

کی تعداد سی زیادہ نہیں ہو سکتی اور اسکی منفی قیمتوں کی تعداد ج (- لا) کی تغیرات علامت

کی تعداد سی زیادہ نہیں ہو سکتی

(۴۵) مثلاً مساوات لا + ۳ لا + ۵ لا - ۷ = ۰ ہو یہاں ایک تغیر علامت اصلی ایک مثبت قیمت

سی زیادہ مثبت قیمتیں نہیں ہو سکتیں اور لا کی جگہ - لا لکھو تو یہ مساوات

لا + ۳ لا - ۵ لا - ۷ = ۰ کی حاصل ہوئی اس میں ایک تغیر علامت کا ہی اصلی اسکی ایک

دس کا رئیس کا قاصدہ علامت کا

ناخبر  
 ۴۳  
 ایک قیمت سی زیادہ کوئی اور بہت قیمت نہیں ہو سکتی ہوگی  
 دس کڑیوں کا قاعدہ علامت کا  
 منفی قیمت ایک سی زیادہ نہیں ہو سکتی پس اصلی مساوات کی دو حقیقی قیمتوں سی زیادہ قیمتیں نہیں ہو سکتیں

اس مثال میں مجرب نفعہ اس کی ہم کو یہ معلوم ہوتا ہے کہ ایک مثبت قیمت ہی اور ایک منفی قیمت ہے اور یہی ہم فی الہی تحقیق کر کے لکھا ہے کہ ایک سی زیادہ ہر ایک قیمت نہیں ہو سکتی۔

اب ہمیں اسات  $3 + 2 + 1 = 6$  پر خیال کرو اور اس میں  $6$  اور  $6$  نو مثبت ہیں

اب یہاں کوئی تغیر علامت نہیں ہی اس واسطی اسکی کوئی قیمت نہیں ہی اور بہت دفعہ ۲۷

کی موافق یہی ظاہر ہے اور اگر ہم لاکھین تھوپہ - لاکھین نوسوات میں ایک تھوپہ علامت کا ہوگا تو اصلی مسوات کی ایک منفی قیمت سی زیادہ کوئی منفی قیمت نہیں ہو سکتی اسلئے اصلی مسوات کی دو خیالی قیمتیں ہیں

اب پھر مساوات لائے۔  $q + r =$  پر خیال کرو اور اس میں  $q$  اور  $r$  دونوں مثبت ہیں

اب یہاں دو تغیر علامت کی بن سہمی اوسکی دو مثبت قیمتوں سی زیادہ قیمتیں نہیں ہو سکتیں

اور اگر لاکھی جگہ - لاکھوں نمواں ایسی حاصل ہوگی کہ اوس میں ایک تغیر علامت ہوگا ایسی اصلی

مساوات کی ایک منفی قیمت سی زیادہ کوئی منفی قیمت نہیں ہو سکتی

اس مثال میں مجرب دفعہ ۲ کی عمر اس بات کو جانتی ہیں کہ ایک منفی قیمت اوسکی ہے اور یہ

اب ہم نے نختہ کر کے لکھا ہے کہ ایک سی زیادہ مہنی قیمت نہیں ہو سکتی اور باقی دو قیمتیں تختہ

میتھ مقدادیر میں یا خجالی المقدادیر میں حکومت دس کلاڑس کے قاعدہ علامات نہیں دریا کرتے

لیکر ہوجائے۔ ۴۰ یہ نتیجہ بد امنی کی کھانوائ جسکی قیمتیں مساوات معروضہ کے

قیمتوں کی مخدوروں کی نفات کی برائے بیعت یہ ہے کہ ۲۰۰ + ۲۰۰ + ۲۰۰ = ۶۰۰

اور ڈس کارٹس کے قاعدہ علامات اور دفعہ ۲۴ کی موافق اگر ۲-۲-۲۴ ق منفی ہے

تو آخر مساوات کی کوئی قیمت منفی نہیں ہو سکتی اور پہلے مساوات کی کوئی قیمت خیالی نہیں ہو سکتی

اور اگر ۲۷-۲۸ ق مہشت ہی تو اخر مساوات کی بوجہ پندرہ مہ کے کوئی معنی قیمت نہیں ہونی کی

اسو اسطی اصلی مساوات کی دو خیالی قیمتیں ہوں گئیں  
(۴۴) طالب علم کو اس بات پر غور کرنی چاہی کہ دفعہ ۲۴ میں جو نتائج لکھے ہیں وہ بالکل ٹریٹس کے  
قاعدہ علامتا کی مطابق ہیں اور اس کے سب سے متنبہ ہو سکتی ہیں اور دفعہ ۲۲ میں جو دعوی ثابت کیا ہے  
وہ بھی قاعدہ ڈس کارٹیس میں داخل ہی اور ہم کو اس قاعدہ سے یہ بات بھی معلوم ہوتی ہے  
کہ دفعہ ۲۲ میں جس مساوات پر بحث ہوئی ہے اس کی ایک مثبت قیمت سی زیادہ مثبت قیمتیں ہو سکتی ہیں  
خواہ برابر ہوں خواہ نابرابر

(۴۵) ڈس کارٹیس کے قاعدہ علامات میں یہ ثابت ہوا ہے کہ کثیر الارقام کو ایک جز ضربی میں  
جو موافق ایک تحقیقی مثبت قیمت کی ہو ضرب مبنی سی کم از کم ایک تغیر علامت داخل ہو سکتا ہے  
اب یہ بیان کیا جاتا ہے کہ تغیرات علامات کی جو داخل کئی جاتی ہیں تعداد میں طاق ہوتی ہیں  
اسو اسطی کہ اول فرض کرو کہ اصلی کثیر الارقام میں آخر علامت + ہی تو کل تعداد تغیرات علامت  
کی اصلی کثیر الارقام میں جفت یا صفر ہونی چاہی اور کثیر الارقام جدید میں آخر علامت - ہی  
تو تعداد تغیرات علامت کی طاق ہونی چاہی اسی معلوم ہوتا ہے کہ تغیرات علامت جو داخل  
کئی گئی ہیں وہ طاق ہیں جفت کا طاق جب ہے متا ہی کہ طاق زیادہ ہو

دوم فرض کرو کہ آخر علامت اصلی کثیر الارقام میں - ہی تو کثیر الارقام جدید میں آخر علامت  
+ ہوگی تو اصلی کثیر الارقام میں تعداد تغیرات علامت کی طاق ہوگی اور کثیر الارقام جدید  
میں تعداد تغیرات علامت کی جفت ہوگی اسو اسطی تغیرات جو داخل کئی گئی ہیں ان کی تعداد طاق ہوگی  
(۴۸) اگر سب قیمتیں مساوات ج (لا) = کی تحقیقی ہوں تو تعداد مثبت قیمتوں کی برابر

ج (لا) کی تغیرات علامت کی تعداد کی ہی اور تعداد منفی قیمتوں کی برابر ج (- لا) کے  
تغیرات علامت کی تعداد کے ہے

فرض کرو کہ مساوات ن درجہ کی ہی اور م تعداد مثبت قیمتوں کی ہی اور م تعداد  
منفی قیمتوں کی اور م تعداد تغیرات علامت ج (لا) کی







اور اگر اورب کی علامتیں متضاد ہوں تو ایک تغیر علامت ج (لا) اور ج (-لا) میں واقع ہوگا  
اسوسطے ج (لا) میں ۲+۱ رقموں کی ساقط ہونی سی ج (لا) اور ج (-لا) کی تعداد تغیرات  
علامت میں سی ۲+۱ کا نقصان عاید ہوتا ہی اگر نصف منقص ارقام متحد علامت کے درمیان واقع ہو  
اور ۲ تغیرات علامت کا نقصان عاید ہوتا ہی اگر نصف منقص ارقام مختلف علامت کی درمیان واقع ہو  
اور یہ قاعدہ تمام اصناف منقصہ پر قیمتیں تعداد ارقام طاق ہوں حاوی ہے  
اسوسطے مساوات ج (لا) = کی کم از کم اونسی قیمتیں خیالی ہوں گیں جیسا کہ دعویٰ میں بیان کیا  
(۲) اب دفعہ ۱ کی بہہ ایک مثال ہی کہ اگر ج (لا) میں دو قیمتیں یکساں علامت کی ہوں اور  
اونکی درمیان ایک رقم مفقود ہو تو کم از کم اوسکی درنا ممکن قیمتیں ہوں گیں اور اگر ایک رقم ایسی  
دو رقموں کی درمیان مفقود ہو کہ اونکی علامتیں متضاد ہوں تو اسی کچھ نتیجہ ہم نہیں نکال سکتی  
کہ اوسکی خیالی قیمتیں کتنی ہوں

اب اس بات پر ہی غور کرنی چاہی کہ ارقام منقصہ کی نسبت سی ج (لا) اور ج (-لا) کے  
تغیرات علامت کی تعداد چھوٹی مساوات کی درجہ کی تعداد سی ہوتی ہی اور ان دونوں تعدادوں کا  
حاصل تفریق جفت عدد ہوتا ہی

دفعہ ۱۰ اور ۱۱ کی دو ممکن صورتوں کی پہچان کرنی سی بہہ بات ظاہر معلوم ہوتی ہی  
یعنی اگر طریقہ کتابت متا دیر کو موافق دفعہ ۱۱ کے اختیار کریں تو عددن - مو - ہو ہمیشہ  
ایک جفت عدد ہوتا ہی اور موافق دفعہ ۱۱ کی ہم کو اسی نتیجہ کی لکھنی کی پہلی سی توقع تھی

### بائششم مساوی قیمتیں

(۳) بعض اوقات تو اس بات کی معلوم ہونگی کہ مساوات مفروضہ مساوی قیمتیں کہتی ہے  
ضرورت پڑتی ہی اور بعض اوقات اس بات کی جانتی سی آسانی ہو تی ہی چنانچہ بہہ بات  
اس کتاب کے آگے مطالعہ کرنی سی معلوم ہو جائیگی اسوسطے اب اس بات کو بیان کرینگے کہ کس طرح  
مساوات کی متساوی قیمتوں کو تحقیق کرتی ہیں اور کس طرح ادن اجزاء ضربی کو موافق

مساوی قیمتوں کی مساوات میں ہونی ہیں خارج کریم میں اور کس طرح خارج کر کے مساوات کی تحویل ایسی مساوات کی طرف کرنی ہیں کہ اس کی قیمتیں غیر مساوی ہونی ہیں اول ہم ایک خاصیت جملہ معلوم کی اول جملہ مشتقہ کی ثابت کرتے ہیں

(۴۲) اگرچہ (لا) ایک جملہ صحیح ناطقہ لاکا ہو اور (لا) اس کا اول جملہ مشتقہ ہو تو یہ ہوگا کہ

$$\frac{ج}{لا} = \frac{ج}{لا-ب} + \frac{ج}{لا-ج} + \dots + \frac{ج}{لا-ک}$$

آئیں اور ب اور ج ... ک خیالی اور حقیقی قیمتیں مساوات ج (لا) = کی ہیں وجہ اس کی یہی ہے کہ ج (لا) میں لاکا اصلی قوت کا سرعہ فرض کرو تو بموجب دفعہ ۳۳ کے ہم کو یہ متبادل حاصل ہوگا کہ

$$ج (لا) = ع (لا-ا) (لا-ب) (لا-ج) \dots (لا-ک) \quad (۱)$$

ع + بی بجای لاکے رکھو تو

$$ج (ع + ب) = ع (ع + ب - ا) (ع + ب - ب) (ع + ب - ج) \dots (ع + ب - ک)$$

ہر طرف مساوات کو ایک سلسلہ میں موافق قواعد متضادہ کی پہلا تو بموجب دفعہ ۱۲ کے دائیں طرف کی یہ صورت ہوگی کہ

$$ج (ع + ب) + ج (ع + ب - ا) + \dots + \frac{ج^۲}{۲ \times ۱} (ع + ب - ا) \dots$$

پس سری کلچ (ع) ہی اور اس واسطے ج (ع) برابر ہوگا بائیں طرف میں بی کی سر کے یعنی

$$ع (ع - ب) (ع - ج) \dots (ع - ک) + ع (ع - ب) (ع - ج) \dots (ع - ک) + \dots$$

$$\frac{ج (ع)}{ع - ب} + \frac{ج (ع)}{ع - ج} + \dots + \frac{ج (ع)}{ع - ک}$$

اور مفادیر تنخیر کی واسطی ہر مرکز کو کام میں لاسکتی ہیں جس کی کچھ قیمت ہو اس کی کو لاسی بدل تی ہیں تو یہ حاصل ہوگا کہ

$$ج (لا) = \frac{ج (لا)}{لا-ا} + \frac{ج (لا)}{لا-ب} + \frac{ج (لا)}{لا-ج} + \dots + \frac{ج (لا)}{لا-ک} \quad (۲)$$

اب ہمہ تنچہ اوس صورت میں ہی صحیح ہے کہ مفادیر اور ب و ج ... میں

ایک یا کئی برابر ۱ یا برابر کی ہو ... اور طے ہذا القیاس  
اب کل میں فرض کرو کہ ۱ ٹھیک ردفعہ اور ب ٹھیک ص دفعہ اور ج ٹھیک ط دفعہ ... واقع ہوتا ہے  
(۱) کو اسطرح لکھ سکتی ہیں کہ

$$ج (لا) = ع (لا - ا) + (ب - لا) ص (لا - ح) + ...$$

اور (۲) کو اسطرح لکھ سکتی ہیں

$$ج (لا) = ع (لا - ا) + (ب - لا) ص (لا - ح) + ...$$

(۵) اگر ج (لا) اور ع (لا) کا کوئی وقف مشترک حسین لا ملحق ہو گا تو مساوات ج (لا) =  
کے برابر قیمتیں ہوں گیں اور اگر وقف مشترک نہ ہو گا تو کوئی برابر قیمت نہیں ہوگی  
فرض کرو کہ ۱ و ب وج ... کہ حقیقی یا خیالی قیمتیں مساوات ج (لا) = کے میں تو

$$ج (لا) = ع (لا - ا) + (ب - لا) ص (لا - ح) + ... (لا - ک)$$

$$تو ج (لا) = ع (لا - ب) + (ج - لا) ک + ع (لا - ا) + (لا - ح) ... (لا - س) ...$$

اگر ۱ اور ب اور ج ... کہ تمام غیر مساوی قیمتیں ہوں تو اجزاء ضربی (لا - ا) (لا - ب)

لا ج ... لا ک میں کوٹھڑ ضربی ج (لا) کو نہیں تقسیم کر لگا وجہ اسکی یہ ہے کہ

لا - ۱ ہر ایک رقم ج (لا) کو پورا تقسیم کرنا ہی مگر اول رقم کو نہیں تقسیم کرتا

اور علی ہذا القیاس اور اجزاء ضربی کی کیفیت ہی اور ان اجزاء ضربی میں سی حاصل ضرب ہی

کتنی ایک اجزاء ضربی کا نہیں پورا تقسیم کر لگا اشیاء بت ہوا کہ اگر ج (لا) اور ج (لا)

دو وقف مشترک نہیں رکھتا تو ج (لا) کو کسی مساوی اجزاء ضربی نہیں رکھتا پس معلوم ہوا کہ

اگر ج (لا) اور ع (لا) وقف مشترک رکھتی ہوں تو ج (لا) کی سب اجزاء ضربی غیر مساوی نہیں ہو سکتی

دوم فرض کرو کہ مساوات ج (لا) = کی برابر قیمتیں ہیں اور ردفعہ ۱ اور ص دفعہ

اور ط دفعہ ج اور علی ہذا القیاس واقع ہوتا ہے تو

$$ج (لا) = ع (لا - ا) + (ب - لا) ص (لا - ح) + ... + (ط - لا) ح + ...$$





مساوی قیمتیں

بارششم

اور مساوات ج (لا) = کی رہے ہوں گے جن میں سی ہر ایک برابر د کے ہوگا  
 بس اس طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ (لا - ۱) ایک جز ضربی ج (لا) کا ہو جو مشتق جملے  
 ج (لا) وج (لا) ... ج (لا) سب کے سب لا سے فنا ہو جائیگے  
 اور یہ اس طرح ہی ثابت ہو سکتی ہیں

اور یہ اس طرح ہی ثابت ہو سکتی ہیں  
فرض کر دو کج (لا) = (لا + ۱) ج (لا) = (لا) ایک جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا فرض کیا گیا ہے  
جس میں جز ضربی لا - ۱ داخل نہیں ہے لا = ۱ + ۱ رہی رکھو تو  
۱ ج (۱ + ۱) = ج (۱ + ۱)

ابن این طریق کارکن یی پر پو تقسیم ہوتا ہی تو بائیں طرف کارکن ہی پورا ہی پر پورا تقسیم ہوتا ہی، پس یہ حاصل ہو گا کہ

ج (لا) = ج (ا) = ... ج (ا) = ۰  
اور چونکہ دائیں طرف کارکن کو پراسی کی کسی قوت پر جو سی سی اعلیٰ درجہ کہتی ہو نہیں سمجھ سکتا  
اسلیٰ ضروری ہے کہ بائیں طرف کارکن بھی ایسا ہو اسلئے ج (ا) صفر نہیں ہے پس  
تعداد ارقام سلسلہ ج (لا) اور ج (لا) اور ج (لا) = ۰۰۰ میں جولا = ۱ کی مہونی جو فنا ہوتی ہیں  
اومنی پر جتنی لا - ۱ کا ج (لا) میں قوت نما ہے  
مثلاً فرض کرو کہ

$$r + u\lambda + v\mu + w\nu + \delta = (u)\mathcal{C}$$

یہاں پہ در یافت ہوگا کہ سلسلہ ج (۱۱) وج (۱۱) - ۰۰۰ مین  
ج (۱۱) اول ہی ۱۱ = اسی نمائیں ہوتا پس جز ضربی (۱۱ + ۱) کا ج (۱۱) مین  
واقع ہوتا ہے اور پہ در یافت ہوگا کہ ج (۱۱) = (۱۱ + ۱) ۳ (۱۱ - ۱ + ۳)  
(۸۰) ایک اور طریقہ مختصر مساوی قیمتوں کی تحقیق کرنے کا ہم بیان کرتے ہیں

اگر مساوات ج (لا) = کی ایک سی زیادہ قیمتیں برابر کی رکھتی ہوں تو اسی نتیجہ نکلیں گے کہ ج (لا) کو لا۔ اور تقسیم کرتی سی خارج قسمت نکلتا ہی وہ لا = اسی معدوم ہوتا ہے پس موافق دفعہ کے ۔۔۔ خارج قسمت کی نکالنے سی یہ حاصل ہوگا کہ

$$ن ع. ۱ - ۱ + (ن - ۱) ع. ۱ - ۱ + ۰۰۰ + ۲ + ۱ ع. ۱ - ۲ + ۱ ع. ۱ - ۱ =$$

یعنی ج (لا) فنا ہو جائیگا جب لا = کے ہو

(۸۱) پس سی یہ معلوم ہوا کہ جب ہم کو مساوات ج (لا) = کی برابر قیمتوں کا دریافت کرنا منظور خاطر ہو تو ہم آغاز سطح کریں کہ + وفق مشترک اعظم ج (لا) اور ج (لا) کا دریا کریں اور اس وفق مشترک اعظم کو برابر مقرر کر لکھ کر مساوات بنائیں تو یہ ایک مساوات حل کرنی کی رہی ایسی حاصل ہو جائیگی کہ جسکی قیمتیں وہ ہوں گیں جو مساوات ج (لا) = کی مکر قیمتیں ہیں اور چونکہ یہ وفق مشترک اعظم خود ایک جدیدہ جملہ ہو سکتا ہی جس میں اجزاء ضربیہ مساویہ ملتف ہوں اس واسطی یہ فائدہ مند ہو گا کہ ہم عمل کو ایسی ضبط اور نظم کی ساتھ کریں کہ قیمتیں حتی الامکان تھوڑی سی محنت سی حاصل ہو جائیں اور اب اس بات کو ہم لکھتی ہیں

(۸۲) فرض کرو کہ ج (لا) = ایک مساوات ہو جسکی برابر قیمتیں ہوں اور

$$ج (لا) = ۱۵ ۱۴ ۱۳ ۱۲ ۱۱ ۱۰ ۹ ۸ ۷ ۶ ۵ ۴ ۳ ۲ ۱ ۰$$

۱۰ میں حاصل ضربیہ تمام اجزاء ضربیہ کا جو ایک دفعہ واقع ہوتی ہیں ۱۵ سی اور حاصل ضربیہ اجزاء ضربیہ کا جو دو دفعہ واقع ہوتی ہیں ۱۴ سی اور حاصل ضربیہ اجزاء ضربیہ کا جو تین دفعہ واقع ہوتے ہیں ۱۳ سی اور علی ہذا القیاس تعبیر ہوتی ہیں اگر کوئی جز ضربیہ ج (لا) میں اتنی دفعہ نہ آیا ہو گا جتنی دفعہ کہ بیان کیا گیا تو ایک باکی مقدار

$$۱۵ ۱۴ ۱۳ ۱۲ ۱۱ ۱۰ ۹ ۸ ۷ ۶ ۵ ۴ ۳ ۲ ۱ ۰$$

اب ج (لا) سی اول جملہ مشتق ج (لا) کا حاصل کرو اور پھر وفق مشترک اعظم ج (لا) اور ج (لا) کا حاصل کرو اس وفق اعظم کو ج (لا) سے تغیر کرو







اسی ہم کہتے ہیں کہ ایک مساوات میں اگر ایک مساوات میں درجہ کی جسمیں مثال مقدار ناطقہ محدود ہو تو اور اس کی کوئی قیمت ناطقہ محدود نہ ہو تو اس کی برابر کوئی قیمتیں نہیں ہوگی اور اگر مساوات جو تہی درجہ کی ہو اور اس کی مثال ناطقہ محدود ہو تو اور کوئی قیمت اس کی ناطقہ محدود نہ ہو اور یہی اس کی برابر قیمتیں ہوں تو اس کی دو قیمتیں غیر ناطقہ ہوگی اور ہر ایک دو دفعہ کمزائیگی پس اگر

ج (لا) = مساوات ہو تو ج (لا) ایک مجذور کامل ہوگا

### ساتواں باب مساوات کی قیمتوں کی حدود غنائی اور قیمتوں کا جدا کرنا

(۸۵) اب ہم چند مسائل لکھتے ہیں جنسی بہ درجہ ہوگا کہ مساوات کی تمام حقیقی قیمتیں حدود غنائی کے مقابل واقع ہیں اور ہر قسم اس بات کی تحقیق کریں گے کہ قیمت کی جدا جدا غنائی دریافت کرنی کہاں تک ممکن ہے اور ایسی مسائل کی کہنی کا قاعدہ یہ ہے کہ چوتھی درجہ کی مساوات سی زیادہ درجہ کا مساوات عامہ کا حل حیرت نہیں حاصل ہو سکتا مگر ہم کو علم بعض خاص قیمتوں کا تقریباً حاصل ہوتا ہے اور اس کی شہادت ہم مساواتوں کا اعداد میں حل کر سکتے ہیں غرض ان حدود غنائی کی معلوم ہوتی ہے قیمتوں کا علم ہوگا اور ہر اسی مساواتوں کا حل چوتھی درجہ سی زیادہ کا دریافت ہوگا

اس ساری باب میں ہر جگہ قیمت کی حقیقی قیمت سمجھنا اگر کہیں اس کی خلاف نہ بیان کیا گیا ہو تمام باب حقیقی قیمتوں کے متعلق ہے

(۸۶) جب ہم کہتے ہیں کہ ایک خاص مقدار مساوات کی مثبت قیمتوں کی اعلیٰ حدود غنائی ہے تو اسی اور یہ ہوتی ہے کوئی مثبت قیمت مساوات کی اس مقدار سی زیادہ نہیں ہو سکتی

(۸۷) جو مساوات اپنی سادگی صورت میں ہو اور میں جو منفی مثال سب سے بڑا تعداد ہو اور ایک زیادہ کر دو حاصل جمع اس مساوات کی مثبت قیمتوں کا اعلیٰ حدود غنائی ہوگا

فرض کرو کہ ج (لا) = مساوات ن درجہ کی ہے اور تعداد ع سب سے بڑا منفی مثال ج (لا) میں ہی پس اگر ایک قیمت لا کی ایسی دریافت کیجائی کہ ج (لا) اس قیمت کی موافق اور اسی تمام بڑی قیمتوں کی موافق مثبت ہو تو وہ قیمت مساوات ج (لا) = کی مثبت

باب سیم  
کی مثبت قیمتوں کی اعلیٰ حد غائی ہوگی اب اگر کوئی مثبت قیمت لاک

$$ل - ع (ل - ۱ - ۱ + ۲ - ل - ۳ + \dots + ۱ + ل)$$

کو مثبت بنا دی تو وہ بدرجہ اولیٰ ج (لا) کو مثبت بنائی یعنی لاک کی مثبت قیمت سی ج (لا) مثبت ہوتا ہی  
اگر ل -  $\frac{۱-ل}{۱-۱}$  مثبت ہی اور جب یہ مثبت ہی تو ل -  $\frac{۱-ل}{۱-۱}$  سے ل -  $\frac{۱-ل}{۱-۱}$

بدرجہ اولیٰ مثبت ہی یعنی اگر (ل - ۱) -  $\frac{۱-ل}{۱-۱}$  مثبت ہی اور آخر جملہ مثبت ہوگا  
اگر ل - ۱ بڑا سی ہی پس ج (لا) مثبت ہی اگر ل برابر ع + ۱ کے ہو

یع + ۱ اسی بڑا ہو یعنی ع + ۱ اعلیٰ حد غائی مساوات ج (لا) = کی مثبت قیمتوں کی ہے  
(۸۸) اگر مساوات ج (لا) = میں بجای لاک - مندرجہ کرین اور ن طاق عدد ہو تو  
ہر رقم کی ایسی علامت بدل دو کہ ل کا سر + ہو اور فرض کرو کہ اس صورت کی مساوات کا  
ق تعداد سب سے بڑا منفی سر ہو تو ق + ۱ اعلیٰ حد غائی کی مثبت قیمتوں کے ہوگی  
اور ہو سکتے - (ق + ۱) حد غائی لاک منفی قیمتوں کی ہے

پس اسی معلوم ہوا کہ مساوات ج (لا) = کی سب قیمتیں درمیان ع + ۱ اور - (ق + ۱) کے واقع ہوتی ہیں  
پس اگر مساوات میں تعداد سب سے بڑی مثال بغیر محاط علامت کی م ہو تو مساوات کی تمام قیمتیں  
درمیان م + ۱ د - (م + ۱) کے واقع ہوں گیں

(۸۹) اگر مساوات ن درجہ کی اپنی سادی صورت میں ہو اور عددی قیمت سب سے بڑی مثال کی  
ع ہو اور ل - سب سے بڑی درجہ کی قوت لاک ہو جو منفی مثال رکھتی ہو تو +  $\frac{۱-ل}{۱-۱}$   
اعلیٰ حد غائی مثبت قیمتوں کی ہوگی

فرض کرو کہ ج (لا) = مساوات معروضہ ہو جو تک تمام قیمتیں ماقبل ل - کے مثبت مثال  
رکھتی ہیں تو ج (لا) یعنی لاک کی مثبت قیمت کے موافق مثبت ہوگا اگر  
ل - ع (ل - ۱ - ۱ + ۲ - ل - ۳ + \dots + ۱ + ل)  
مثبت ہو یعنی اگر ل - ع  $\frac{۱-ل}{۱-۱}$  مثبت ہو پس ل بڑا واحد سی فرض کرو

باب مضمون

حدود غازی قیام کی

[illegible]

۱۔ ہر اہل حد غائی مثبت قیمتوں کی مساوات ج (۱۱) = ۰ میں ہے  
(۹۰) اگر مساوات کی سب اہمال منفیہ میں سی ہر ایک مثبت بنا کر او کی قبل کی اہمال مثبتہ کے مجموعہ پر تقسیم کریں تو جو کسر اس طرح سی سب سے بڑی ہوگی اوس پر ایک یا دہ کرنی سی مثبت قیمتوں کی حد غائی حاصل ہوگی

فرض کرو کہ مساوات ج (لا) = ہو اسکین ج (لا)

فرض کرو کہ مساوات ج (لا) = ہو اس میں ج (لا)

$$ع. لا + ع. لا - 1 + ع. لا - 2 + ع. لا - 3 + ع. لا - 4 + \dots + ع. لا - 100 + \dots + ع. لا$$

تعبیر کرتا ہے اب ہم کو معلوم ہے کہ

$$1 + (1 + u + \dots + u^{r-1}) (1 - u) = u^r$$

مسواکے ہر رقم مثبت کو اس صورت قانونیہ کی موافق تبدیل کر کے لکھو اور باقی ارقام کو تبدیل نہ کرو  
توج (لا) کی یہ صورت ہو جائیگی

$$\begin{aligned} & \varepsilon + (1-\varepsilon) \cdot \varepsilon + \dots + \varepsilon^{\frac{1}{\ell}-1} (1-\varepsilon) \cdot \varepsilon + \varepsilon^{\frac{1}{\ell}} (1-\varepsilon) \cdot \varepsilon \\ & \quad , \varepsilon + (1-\varepsilon) \cdot \varepsilon + \dots + \varepsilon^{\frac{1}{\ell}-1} (1-\varepsilon) \cdot \varepsilon + \varepsilon^{\frac{1}{\ell}} (1-\varepsilon) \cdot \varepsilon + \\ & \quad , \varepsilon + (1-\varepsilon) \cdot \varepsilon + \dots + \varepsilon^{\frac{1}{\ell}-1} (1-\varepsilon) \cdot \varepsilon + \\ & \quad \vdots \\ & \quad \varepsilon^{\frac{1}{\ell}-1} (1-\varepsilon) \cdot \varepsilon + \varepsilon^{\frac{1}{\ell}} (1-\varepsilon) \cdot \varepsilon + \dots + \varepsilon^{\frac{1}{\ell}-1} (1-\varepsilon) \cdot \varepsilon + \varepsilon^{\frac{1}{\ell}} (1-\varepsilon) \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

اب اس جملہ کی عمودی سطروں کو دیکھو کہ جہاں مثال منفیہ نہیں ہیں وہاں سطر عمودی کی قیمت مثبت ہی اگر لاطرا اسی ہو مگر اس سطر عمودی میں کہ مثال منفیہ واقع ہوں ہم کو یہ حاصل ہوگا کہ  
(ع. + ع. + ع. ۲) (لا - ا) بڑا ع ۳ سے ہو

(ع + ع + ع + ... + ع - ع) (لا - ا) بُرّاع سے ہو

اسو اسطی چاسی کہ لا بڑا بہ نسبت  $\frac{۵۹}{۱۰۰} = ۰.۵۹$  کی اور

بڑا بہ نسبت  $\frac{۱۰۰}{۵۹} = ۱.۶۹۴۹$  کی ہو اسو اسطی اگر لا  
ان تحصیلہ جملوں میں ہی سب سے بڑی جملہ کی برابر فرض کیا جائے تو وہ قیمت لا کی اور اسی ہر ایک کی  
ج (لا) کو مثبت بنائیں گی یعنی ان جملوں میں ہی سب سے بڑا جملہ اعلیٰ حدوغائی مساوات ج (لا) =  
کی مثبت قیمتوں کی ہے

(۵۱) اب ان قاعدوں کی توضیح دو مثالوں سے کرتی ہیں اول یہ مساوات کو

$$۵۸ - ۱۸ - ۵۳ + ۵۴ - ۱۸ = ۰$$

بموجب دفعہ ۸ کی ۵۳ + یعنی ۵۸ اعلیٰ حدوغائی مثبت قیمتوں کی ہی اور بموجب دفعہ

۸۴ کی اس سب سے کہ لا = ۵ اور ۲ = تو حدوغائی ۱ + ۵۳ = ۵۸ یعنی ۴ حدوغائی ہے

اور بموجب دفعہ ۴۰ کی ان جملوں  $\frac{۱۲}{۱+۸} + ۱ + \frac{۵۲}{۱+۸} + ۱ + \frac{۱۸}{۵۴+۸+۱}$  اور

میں سب سے بڑا جملہ لینا چاہیے یعنی  $\frac{۵}{۴} + ۱$  اسی معلوم ہوا کہ حدوغائی ہے

اب یہ مساوات کو کہ

$$۵ - ۵۸ - ۱۳ + ۲۲ + ۷ - ۴۰ = ۰$$

یہاں دفعات ۸۴ اور ۸۴ سی ۴۰ + ۱ حدوغائی ہی اور بموجب دفعہ ۴۰ کے  $\frac{۱}{۲} + ۱$

حاصل ہوتا ہے اسی معلوم ہوا کہ ۱۹ حدوغائی ہے

پس دو مثالوں میں دفعہ ۴۰ سی اعلیٰ حدوغائی سب سے چھوٹی معلوم ہوتی ہے اب یہ بات آسانی

معلوم ہوتی ہے کہ دفعہ ۸۴ سی بہ نسبت دفعہ ۸۴ کی چھوٹی حدوغائی معلوم ہوتی ہے مگر = ا کے

صورت مستثنیٰ ہی ہیں دو نوحدوغائی میں تطبیق ہو جاتی ہے علی العموم دفعہ ۸۴ زیادہ کام

دیتی ہے جب اکثر مثبت اشیاء مثلاً منفیہ اول کے واقع ہوں جب کی سب سے بڑا ہو جائے

اور دفعہ ۴۰ سی ہمیشہ بہ نسبت دفعہ ۸۴ کی چھوٹی حدوغائی معلوم ہوتی ہے مگر یہ صورت مستثنیٰ ہی کہ

سب سے بڑی منفی اشیاء کی ماقبل ایک ہی مثبت اشیاء ہو یعنی اول ہی رقم ہو اس صورت میں



اب دفعات گذشتہ میں ہی کسی ایک دفعہ کی موافق اعلیٰ حد غنائی اس مساوات کی دریافت کرو اور اس کو اس کی تعبیر کرو تو اس ادنیٰ حد غنائی مساوات مفروضہ کی مثبت قیمتوں کی ہوگی اب فرض کرو کہ ہم دفعہ ۸ کی موافق اعلیٰ حد غنائی دریافت کرتے ہیں اور عینے کو سب سے بڑا مثال منفی تعداد بدلی ہوئی مساوات میں مانتے ہیں تو ا - عینے

اعلیٰ حد غنائی بدلی ہوئی مساوات کی مثبت قیمتوں کی ہوگی اور اسے واسطی مساوات مفروضہ کی مثبت قیمتوں کی ادنیٰ حد غنائی عینے عینے ہے یہاں عینے واقعی تعداد اس سے بڑا مثال مساوات مفروضہ میں ہی جو عینے سے علامت میں اختلاف رکھتا ہے

مثلاً دفعہ ۹ میں عینے = - ۱۸ اور عینے = ۵۴ پس  $\frac{۱۸}{۵۴-۱۸} = \frac{۱۸}{۳۶}$  یعنی  $\frac{۱}{۲}$  یعنی مساوات مفروضہ کی مثبت قیمتوں کی حد غنائی  $\frac{۱}{۲}$  ہے

(۹۴) مساوات ج (۱۱) = کی منفی قیمتوں کی حدود غنائی دریافت کرو لاکھ جگہ - ۱ لکھو اور اس طرح جو بدلی ہوئی مساوات حاصل ہو اس کی مثبت قیمتوں کی حدود غنائی دریافت کرو تو یہ حدود غنائی جس کی علامتیں بدلی ہوئی ہیں مساوات مفروضہ کی منفی قیمتوں کی حدود غنائی ہوں گیں مثلاً مساوات

$$۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵ - ۶ - ۷ - ۸ - ۹ - ۱۰ = ۱۸ + ۱۷ + ۱۶ + ۱۵ + ۱۴ + ۱۳ + ۱۲ + ۱۱ + ۱۰ = ۰$$

۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵ - ۶ - ۷ - ۸ - ۹ - ۱۰ کے رکھو تو یہ حاصل ہوگا کہ

$$۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵ - ۶ - ۷ - ۸ - ۹ - ۱۰ = ۱۸ - ۱۷ + ۱۶ - ۱۵ + ۱۴ - ۱۳ + ۱۲ - ۱۱ + ۱۰ = ۰$$

بموجب دفعہ ۹ کے  $\frac{۱۸}{۱۸+۱۰} +$  یعنی اعلیٰ حد غنائی مثبت قیمتوں کی ہی اور یہی وہ دفعہ ۹۳

$\frac{۱۸}{۱۸+۱۰}$  ادنیٰ حد غنائی منفی قیمتوں کی ہی پس مساوات مفروضہ کی قیمت منفیہ درمیان - ۵ اور -  $\frac{۱۸}{۵۵}$  کے واقع ہوں گیں

(۹۵) اب ہم ایک اور ترکیب و اات کی مثبت قیمتوں کی اعلیٰ حد عا فی کی دریافت کرنی کی کھستی ہیں اور

اوسکو نیوٹن صابائی ترکیب کہتی ہیں

فرض کرو کہ ج (لا) = مساوات کو تغیر کرنا ہی جس پر ہم اب بحث کرتی ہیں لاکھی جگہ ص ۲۷

لکھو اور ج (۵+۴) کو مجموعہ دفعہ ۱۲ کی پہلا دو توسیلات کی صورت یہ ہو جائیگی کہ

$$= \text{ح (مض)} + \text{ح (مض)} + \text{ح (مض)} + \dots + \frac{\text{ح}}{\text{ان}} \text{ح (مض)}$$

اب فرض کرو کہ مصدقیت ہی اور اس کی قیمت ایسی ہی کہ ج (مصد) اور ح (مصد) اور ح (مصد) ۱۰۰ ح (مصد)

سب مثبت ہیں تو کسی کو سنی مثبت قیمت اور برکی مساوات کی شرائط کو یوں راہنہیں کریں گی

لیکن دے لا۔ مہ چونکہ مثبت نہیں ہو سکتا تو لا بڑا مہ سے نہیں ہو سکتا پس مہ

ایک اعلیٰ عدالت (لا) = کی مثبت فیمینون کی ہی پس اگر مساوات مفروضہ اپنی

سادمی صورت میں ج (ھ) سہی تو ضرور مثبت ہوگی اور برابر ک ہوگی

(۹۹) مثلاً یہ مسائل کو کہ

$$\cdot = \delta \cdot \cdot + \psi \cdot \cdot - \psi_4 - \psi_N - \psi + \psi^0$$

پیمان ج (م) = ۵۰۰ + ۴۰۰ + ۲۰۰ - ۲۰۰ - ۲۰۰ + ۲۰۰ = ۵۰۰

$$6 \cdot 0 + 2012 - 2012 - 2012 + 2015 = (2015) \checkmark$$

$$\frac{1}{x} = 4 - 100x + 10000x^2 - 1000000x^3 = (100x)^4$$

$$n - \infty \quad n + \frac{1}{2} = (n) \frac{1}{2}$$

$$1 + \omega^5 = (\omega)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\omega}$$

اب امین آسانی ہی کہ اخر حبلہ صہ سی شروع کرن اور باقاعدہ اگے بڑھیں کو سی سی مثبت

قیمت صہ کی ح<sup>۱</sup> (صہ) کو مثبت بناتی ہی صہ = ا کے ح<sup>۱</sup> (صہ) کو مثبت بناتی ہے

حصہ = ۲ کے 'ح' (حصہ) کو مثبت بناتی ہے اور حصہ = ۴ کے 'ح' (حصہ) کو مثبت بناتی ہے

اور  $\frac{5}{6} = \frac{5}{6}$  کے ح (ص) کو مثبت بنانی ہی تو اسی بہہ دریافت ہوتا ہی کہ  $\frac{5}{6} = \frac{5}{6}$



سب سے پہلے جملوں کو مثبت بناتی ہے اس واسطے مساوات مفروضہ کی مثبت جملوں کی اعلیٰ حدود غائی قیمتوں پر اس بات پر بھی غور کرنی چاہی کہ جس ترکیب کے موافق ہم آخر جملہ سی جلتی ہیں اور صہ کی قیمت مناسب اور ہر کی جملوں میں بڑھانی جاتی ہیں اور سین بہ پہلے ضرور نہیں کہ ہم نمی کی جملوں کو جبکی مثلاً کا پہلی فیصلہ ہو چکا ہے اور کو دوبارہ بہ اس قیمت صہ کی موافق جاچین مثلاً فرض کرو کہ ہم نمی بہ تحقیق کر لیا ہے کہ صہ کی خاص قیمت (۱) تمام جملوں کو ج (۱) تک مثبت بناتی ہے تو صہ کی کوئی بڑی قیمت رکھو مثلاً

۱ + ب + ا تو اس سبب سے کہ

ج (۱ + ب) = ج (۱) + ب ج (۱) + (۱)  $\frac{1}{p \times 1}$  ج (۱) + ۰ + ۰ + ۰

میں تمام فیصلے دائیں طرف مثبت ہو جب فرض کی میں تو ج (۱ + ب) بھی مثبت ہی رہنا کی گزشتہ میں جب یہ دریافت ہو گیا کہ صہ = ۵ کی ج (۱) صہ کو مثبت کرتا ہے تو اس کی اب ضرورت نہیں رہی کہ ہم اور جملوں کو بھی دریافت کریں کہ وہ مثبت بناتا ہے یا نہیں کیونکہ اگر ترکیب ہی سی ہم کو یقین ہو جاتا ہے کہ وہ مثبت بناتا ہے

(۴۷) اب ہم فی یہ بیان کر دیا کہ مساوات کی تمام مثبت حقیقی قیمتوں کی حدود غائی سطح اور مساوات کی تمام منفی حقیقی قیمتوں کی حدود غائی کیونکر دریافت کرتی ہیں اب ہم بعض سائل لکھتی ہیں جنسی کہ مقام قیمتوں کا جو مفرداً یا مجموعتاً ایجا میں معلوم ہوگا پوری تحقیقات اس مضمون کی سٹیم کے ضابطہ میں اگی لکھی ہے

(۴۸) اگر ہم ج (۱) میں لاکھی جگہ متواتر دو مقداریں پر کریں اور ان مقداروں کے درمیان مساوات کی قیمتیں جنکا شمار طاق ہو واقع ہوں تو ہم کو نتائج مختلف علامت حاصل ہونگی اور اگر ہم ج (۱) میں لاکھی جگہ متواتر دو مقداریں مندرج کریں جبکی درمیان مساوات ج (۱) = کی کوئی قیمت نہ واقع ہو اور جو واقع ہوں تو انکا شمار صفت ہو تو نتائج متحد علامت حاصل ہونگے فرض کرو کہ لراور دو مقداریں ہوں جنہیں لراور لراور اور اوب و ج ۰۰۰ کی تمام حقیقی قیمتیں مساوات ج (۱) = کی ہوں جو درمیان لراور لراور واقع ہوں تو یہ موجب دفعہ ۴۲ کی یہ حاصل ہوگا کہ

ج (لا) = (لا-ا) (لا-ب) (لا-س) . . . (لا-ک) (لا-مر)

اس میں مر لا ایک جملہ ایسا ہی جو اجزاء ضربی درجہ دوم کی حاصل ضرب سی بنا ہی جو کہ پہلی پائی علامت نہیں بدلتی یا اصلی اجزاء ضربی سی جو اپنی علامت کہی ایسی حالت میں نہیں بدلتی کہ لا درمیان لڑا اور لو کے واقع ہو لڑا اور لو کو بجائی لا کے متواتر رکھو تو

ج (لر) = (لر-ا) (لر-ب) (لر-س) . . . (لر-ک) (لر-مر)

ح (لو) = (لو-ا) (لو-ب) (لو-س) . . . (لو-ک) (لو-مر)

اب تمام اجزاء ضربی لر-ا اور لر-ب اور لر-ج . . . لر-ک مثبت ہیں اور تمام اجزاء ضربی لو-ا اور لو-ب اور لو-ج . . . لو-ک منفی ہیں اور مر (لر) اور مر (لو)

کی ایک ہی علامت ہی ہے سو ا ح (لو) اور ح (لو) متحد علامت ہونگے اگر ا و ب و ج . . . قیمتوں کا شمار جمع ہو اور مختلف علامت ہونگی اگر قیمتوں کا شمار طاق ہو

(۴۴) اسی معلوم ہوا کہ ح (لا) میں بجائی لا کی دو مقدار متواتر کہیں اور ا و سی نتائج مختلف علامت پیدا ہوں تو ان دو مقداروں کی درمیان ا و ات ح (لا) = کی قیمتیں جن کا شمار طاق ہو واقع ہوں گے اور اگر ا و سی نتائج متحد علامت پیدا ہوں تو ان دو مقداروں کے درمیان ا و ات مذکور کی کوئی قیمت نہیں واقع ہوگی یا تنہی قیمتیں واقع ہوں گے جن کا شمار جمع ہو

اس نتیجہ کی خاص صورت دفعہ ۱۵ کا نتیجہ ہے

(۱۰۰) اس بات پر بھی خیال کرنا چاہی کہ دفعہ ۴۸ کے اثبات میں ہم ضرور نہیں ہے کہ قیمت ا و ب و ج . . . ک سب غیر مساوی ہوں اس بات کو یاد رکھنا چاہی کہ جو قیمت م دفعہ آتی ہو اس کو م قیمتیں شمار کرتے ہیں

ہم لکھ چکی ہیں کہ اگر ح (لر) اور ح (لو) متحد علامت ہوں تو مساوات ج (لا) = کی کیا تو کوئی قیمت درمیان لڑا اور لو کے نہیں واقع ہوگی یا واقع ہوں گے تو ان کا شمار جمع ہوگا

اس باب کے اوپر کی دفعات میں بعض اوقات ہم اس قسم کی دلیل کو کام میں لائیں گے کہ لوہا کوئی اور بڑی اوسے قیمت لاکے ج (۱۱) کو قیمت بناتی ہے اس واسطے مساوات ج (۱۱) = کی قیمت قیمتوں کی اعلیٰ حد غائی ہو ہی اس بلکہ خوشیالی میں کہنا چاہئے کہ جہاں ہم نے یہ لکھا ہے کہ ج (۱۱) کو قیمت بناتی ہے تو اوسے مطلب ہمارا یہ ہے کہ ج (۱۱) کو مثبت مقدار بناتی ہے اس کو صفر نہیں بناتی مثلاً اگر ج (۱۱) = (۱۱-۱۲) (۱-۱۱) میں لا پیرا بہ نسبت واحد کی ہو تو ج (۱۱) منفی نہیں ہونے کا لیکن اسی بہ نتیجہ نہیں نکالنا چاہیے کہ واحد اعلیٰ حد غائی مثبت قیمتوں کی ہے اس واسطے کہ ایک قیمت موجود ہے پس اگر ہم کو صرف یہ معلوم ہو کہ کوئی قیمت لاکے بڑی بہ نسبت لو کی ج (۱۱) کو منفی نہیں بنا سکتی تو اوسے بہ نتیجہ نہیں نکالنا چاہیے کہ لوسی کوئی بڑی قیمت نہیں ہے مگر اوسے بہ نتیجہ نکالنا چاہیے کہ کیا تو کوئی قیمت نہیں اور اگر کوئی قیمت یا کوئی قیمتیں ہیں تو وہ جفت مرتبہ مکرر لائی ہیں

(۱۰۱) اب ہم ایک بڑا مسئلہ یہ لکھتے ہیں کہ مساوات ج (۱۱) = اور ح (۱۱) = کی قیمتوں میں کیا ارتباطات ہیں یہاں ح (۱۱) اول جملہ مشتق ج (۱۱) کا ہی اس مسئلہ کو کہیے

**رول** کا ضابطہ یہی کہتی ہیں کیونکہ سب سے پہلی اس مسئلہ کا وہ جد تھا (۱۰۲) مساوات ح (۱۱) = کی ایک حقیقی قیمت مساوات ج (۱۱) = کی دو متصل کی حقیقی قیمتوں

درمیان واقع ہوتی ہے فرض کرو کہ مساوات ج (۱۱) = کی حقیقی قیمتیں بلحاظ مقدار کی بہ ترتیب تصاعیدی جبر مقابله کے موافق لکھی گئی ہیں اور ادب و س . . . کی تعبیر ہوتی ہیں اور فرض کرو کہ سر (۱۱) حاصل ضرب بہ دوم کی اجزاء ضربی کا موافق خیالی قیمتوں مساوات ج (۱۱) = کے ایسا ہے

کہ سر (۱۱) اپنی علامت نہیں بدل سکتا پس بموجب دفعہ ۳۴ کے

$$ج (۱۱) = (۱۱-۱) (۱۱-۲) (۱۱-۳) \dots (۱۱-ک) (۱۱-ک+۱) \dots (۱۱-۱)$$

اس متطابقہ میں لاکے جگہ + ی رکھو تو

$$ج (۱۱+۱) = (۱۱+۱-۱) (۱۱+۱-۲) (۱۱+۱-۳) \dots (۱۱+۱-ک) (۱۱+۱-ک+۱) \dots (۱۱+۱-۱)$$

اب فرض کرو کہ اس متبادلہ کی ہر رکن کی صورت مفصلہ فوائد متعاہدہ میں لکھی جاتی تو مثال جی  
دائیں طرف ج (د) ہوگا دفعہ ۱۲ کو دیکھو اور مثال ی کی بائیں طرف

$$[ (د-ب) (د-س) \dots (د-ک) + (د-ب) (د-س) \dots (د-ک) ] \text{ سر (د)}$$

$$+ (د-د) (د-ب) (د-س) \dots (د-ک) \text{ سر (د)}$$

ہوگا ان جی کی مثال کو برابر لکھو اور کولاسی بدل کر متبادلہ میں لکھو تو یہ حاصل ہوگا کہ

$$ج (لا) = [ (لا-ب) (لا-س) \dots (لا-ک) + (لا-د) (لا-س) \dots (لا-ک) ] \text{ سر (لا)}$$

$$+ (لا-لا) (لا-ب) (لا-س) \dots (لا-ک) \text{ سر (لا)}$$

اب متواتر ادب و س . ک کو لاکے جگہ رکھو تو آخر رقم متبادلہ کی بائیں طرف کی ہر صورت میں

معلوم ہو جائیگی اور یہ وسطی علامتیں ج (د) اور ج (ب) اور ج (س)

$$\dots ج (ک) کی وہی علامتیں ہیں جو (د-ب) (د-س) \dots (د-ک) (د-ب) (د-س) \dots (د-ک)$$

$$\dots (ک-د) (ک-ب) (ک-س) \dots اور یہ علامتیں علی التبادل مثبت اور منفی ہیں$$

یعنی ایک مثبت دوسری منفی پہر تیسری مثبت اور چوتھی منفی اور علی ہذا القیاس اسوے کہ اول جملہ کا کوئی جزئی

منفی نہیں ہی اور دوسری جملہ کا ایک جزئی منفی ہی اور تیسری جملہ میں دو اجزاء ضربی منفی ہیں

اور علی ہذا القیاس اسی معلوم ہوا کہ بموجب دفعہ ۴۹ کی مساوات ج (لا) = کی قیمتیں جنکا

شمار طاق ہو مساوات ج (لا) = کے متصل کی قیمتوں کے درمیان واقع ہیں

(۱۰۳) دفعہ گذشتہ میں قیمتیں ا و ب و س . ک کے ساتھ یہ قیمتیں ہیں اب فرض کرو

کہ قیمت ا مکرر دفعہ اور قیمت ب مکرر دفعہ اور قیمت س مکرر دفعہ اور علی ہذا القیاس

تو یہ حاصل ہوگا کہ

$$ج (لا) = (لا-ا) (لا-ب) (لا-س) \dots \text{سر (لا)}$$

$$ج (لا) = \text{سر (لا)} [ (لا-ا) (لا-ب) (لا-س) \dots + (لا-ا) (لا-ب) (لا-س) \dots ]$$

$$+ (لا-ط) (لا-ب) (لا-س) \dots \text{سر (لا)}$$

باب سوم فرض کرو، (لا) دفع عظم ح (لا) اور ح (لا) ہی یعنی بہہ فرض کرو کہ  
ح (لا) = (لا - لا) - (لا - ب ص) - (لا - س ط) -

$$\text{تو ج } \frac{(u)}{(v)} = \text{سر } (u) \left[ (r-l-b)(l-s) + \dots + v(l-a)(l-s) + \dots \right]$$

اس جملہ کو ح (لا) بنو گرو تو موافق سابق کی بہ تحقیق ہوگا کہ مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک قیمتیں جیسا شمار طاق ہو اور ب کی درمیان اور دوسرے قیمتیں جیسا شمار طاق ہو اور اس کی درمیان اور علی ہذا القیاس واقع ہیں اور چونکہ ح (لا) = ح (لا) ح (لا) ح (لا) ہم حاصل ہی تو جو سوفت ح (لا) معلوم ہوگا تو ح (لا) بھی معلوم ہوگا پس مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمتیں جیسا تعداد طاق ہو مساوات ح (لا) = ۰ کی سرد متصل کی غیر مساوی قیمتوں کی درمیان واقع ہیں مساوات ح (لا) = ۰ کی مساوی قیمتوں کی نسبت ہم یہ جاننتی ہیں کہ قیمت اور جو رد دفعہ مساوات ح (لا) = ۰ میں ایسی ہی دھڑ ۱ - دفعہ مساوات ح (لا) = ۰ میں اتنی ہی اور علی ہذا القیاس اور قیمت ب حوص دفعہ مکرر مساوات ح (لا) = ۰ میں ایسی ہی ص ۱ - دفعہ مساوات ح (لا) = ۰ میں مکرر آتی ہے

اور علی ہذا القیاس

اسی میں بڑی سہانی ہوگی کہ ہم یوں خیال کریں کہ مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمت ل کی برابر جو قیمتیں ہوں اور میں را۱ یوں ایسی ہوتی ہیں کہ انہیں سی ہر ایک میں ح (لا) = ۰ کی قیمت ل کی کمزور ہوتی ہو اور یہی کیفیت اور مکرر قیمتوں کی ہی پس خیال سی ہم کو یقین داتی ہوگا کہ ۱۰۲ کا دعوی عام ہی خواہ مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمتیں برابر ہوں یا نا برابر (۱۰۴) مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک قیمت سی زیادہ قیمتیں مساوات ح (لا) = ۰ کی کوئی سبب متصل کی قیمتوں کے درمیان نہیں واقع ہو سکتیں اس واسطی کہ اگر ایک قیمت سی زیادہ قیمتیں ہوں تو ایک قیمت باقی قیمتیں مانج (لا) کی اوٹلی درمیان واقع ہو سکتیں تو مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمتیں جو بموجب فرض کے متصلہ تھیں متصلہ نہ رہیں

اور ایسی ہی مساوات ح (لا) = کی سب سے بڑی قیمت سی بڑی قیمت مساوات ح (لا) = کی ایک ہی ہو سکتی ہے اور مساوات ح (لا) = کی سب سے چھوٹی قیمت سی چھوٹی قیمتیں بہت سی ہو سکتی ہیں (۱۰۵) اگر مساوات ح (لا) = کی سب سے کم قیمتیں ہوں تو مساوات ح (لا) = کی بھی سب سے کم قیمتیں حقیقی ہو سکتی ہیں اور سب سے پہلی مساوات پہلی مساوات سی درجہ میں ایک کم ہے اور ہر ایک قیمت دوسری مساوات کی پہلی مساوات کی متصل کی قیمتوں کی درمیان واقع ہے اور علی العموم اگر مساوات ح (لا) = کی کم قیمتیں ہوں تو مساوات ح (لا) کی یقینی کم قیمتیں حقیقی قیمتیں ہو سکتی ہیں اور اسی زیادہ بھی قیمتیں ہو سکتی ہیں

(۱۰۶) چونکہ ح (لا) اول جملہ مشقہ ح (لا) کا ہی تو مساوات ح (لا) = کی قیمتیں جن کا شمار طاق ہو وہ مساوات ح (لا) = کی متصل کی قیمتوں کی درمیان واقع ہو سکتی ہیں اگر مساوات ح (لا) = کی حقیقی قیمتیں ہوں تو مساوات ح (لا) = کی کم از کم کم - حقیقی قیمتیں اور مساوات ح (لا) = کی کم از کم کم - حقیقی قیمتیں ہو سکتی ہیں اسی طریقہ کے مراعت سے نتیجہ حاصل ہوتا ہے اگر مساوات ح (لا) = کی حقیقی قیمتیں ہوں تو مساوات ح (لا) = کی کم از کم کم - حقیقی قیمتیں ہو سکتی ہیں

اسی معلوم ہوا کہ اگر مساوات ح (لا) = کی تو خیالی قیمتیں ہوں تو مساوات ح (لا) = کی کم از کم کم تو خیالی قیمتیں ہو سکتی ہیں اور مساوات ح (لا) = کی تو خیالی قیمتوں سی کم قیمتیں ہوں تو اوسکی ن - حقیقی قیمتوں سی زیادہ قیمتیں ہو سکتی ہیں اور مساوات کا ہی پس مساوات ح (لا) = کی ن - لو - حقیقی قیمتوں سی زیادہ قیمتیں ہو سکتی ہیں اور چونکہ یہ مساوات ن - ر درجہ کی اسکی اوسکی لو قیمتیں خیالی نہیں ہو سکتی ہیں اور یہ خلاف فرض کے ہے مثلاً فرض کرو کہ ح (لا) = لا (۱ - لا)

مساوات ح (لا) = کی تمام اصل قیمتیں ہیں یعنی برابر کے ہی یا برابر کی ہی اسی معلوم ہوا کہ مساوات ح (لا) = کی تمام اصل قیمتیں درمیان - اور اکی واقع ہو سکتی ہیں اور یہ مساوات کا ہے کہ







کی مثبت قیمتوں کی ادنیٰ حد غائی دریافت ہوئی ہے اور اسکو درسی تغیر کر دو تا ۱۰۰ فیصد قیمت میں سبک کی ہوگی  
دفعہ ۷۰ میں ہم نے ایک مثال لکھی ہے کہ کس طرح ایک مساوت بنتی ہے کہ جسکی قیمتیں مساوات مفروضہ کے  
قیمتوں کے تفاوت کی مجذوری برابر ہوتی ہیں اور اس مثال پر کیا موقوف ہے ہم علی الاعموم ایذا کو سہ  
بحث کرینگے وارنگ حساب کی ترکیب ایسی پیچیدہ ہے کہ وہ تیسرے درجہ کی مساوات سے زیادہ درجہ  
کی مساوات میں عمل میں لانی سے کچھ فائدہ نہیں دیتی اور کسی نتیجے میں درجہ پیدا ہوتی ہے کہ اولاً  
کہوں اور دشواری غرض یہ کہ ترکیب عملیات میں تو کسی کام کی نہیں مگر نظریات میں اسکو مستعمل ہو جاتا ہے  
(۱۱۰) مثلاً وارنگ حساب کے ترکیب کے لئے یہ مساوات

$$۳ - ۲ - ۱۱ - ۱۲ + ۱۳ = ۰ \text{ لو}$$

بموجب دفعہ ۷۰ کی وہ مساوات جسکی قیمتیں مساوات مفروضہ کی قیمتوں کی تفاوت کی مجذوری ہوں یہ ہے

$$۳ - ۲ - ۱۱ - ۱۲ + ۱۳ = ۰$$

$$\text{و کی جگہ } \frac{1}{2} \text{ رکھو تو } ۴ - ۲ - ۱۱ - ۱۲ + ۱۳ = ۰$$

$$\text{یعنی } ۴ - ۲ - ۱۱ - ۱۲ + ۱۳ = ۰ \text{ (ی - } \frac{1}{2} \text{)}$$

اب ۹ اعلیٰ حد غائی می کی قیمتوں کی ہی اسکو اعلیٰ حد غائی  $\frac{1}{4}$  ہوگی

اسی معلوم ہوا کہ  $\frac{1}{4}$  یعنی  $\frac{1}{4}$  مساوات مفروضہ کی ہر دو قیمتوں کے تفاوت سے کم ہے

امعجب دفعہ ۸ کی مساوات مفروضہ کی مثبت قیمتوں کی اعلیٰ حد غائی ۱۲ یعنی ۵ ہے اور بموجب دفعہ ۹۷

مساوات مفروضہ کی منفی قیمتوں کی اعلیٰ حد غائی تعداداً

۱۰ (۱۲ + ۱۱) ہے پس مساوات مفروضہ کی تمام قیمتیں ۵ اور ۳ کے درمیان واقع ہوتی ہیں

اب لاکھ قیمتیں ۵ اور ۵ -  $\frac{1}{2}$  اور ۵ -  $\frac{1}{3}$

متواتر کہنی سے یہ دریافت ہوگا کہ ایک قیمت ۱۳ اور  $\frac{1}{3}$  کی درمیان اور ایک قیمت ۲ اور  $\frac{1}{2}$  کی

درمیان اور ایک قیمت ۲ - اور ۲ کے درمیان واقع ہوگی

(۱۱۱) اب ہم اس باب کو ایک عمومی پرچم کرتے ہیں اور یہ عمومی اصول کی ایک مثال ہی جو ابھی سے ثابت کی ہے

مساوات ح (لا) = ۰ = میں حسین  
 ح (لا) = ع لا + ع لا - ۱ + ۰۰۰ + لا - ر  
 میں اگر ق کی عددی قیمت تعداد سے بڑا ہو اور ر نسبت اور  $\frac{۱}{۲} + ۲$  ق سی کم ہو  
 تو ایک حقیقی قیمت ۲ ر سی چھوٹی ہوگی  
 جب لا صفر ہو تو ح (لا) منفی ہی تو لا کی مثبت قیمت ح (لا) کو مثبت بنا لینگے اور بدرجہ اولیٰ  
 مثبت بنا لینگے اگر وہ

لا - ر - ق (لا + لا - ۱ + ۰۰۰ + لا + لا)  
 کو مثبت بنا لینگے یعنی اگر وہ لا - ر - ق لا = ۱ - لا کو مثبت بنا لینگے  
 اسی معلوم ہوا کہ اگر لا بہ نسبت واحد کی کم ہو اور (۱ - لا) (لا - ر) - ق لا مثبت ہو  
 تو ح (لا) بدرجہ مثبت ہوگا اب لا کی جگہ ۲ ر آخر جملہ میں رکھو تو وہ ر (۱ - ۲ - ۲ ق ر)  
 ہو جائیگا اور یہ مثبت ہی کیونکہ جو فیض کی ر (۲ + ۲ ق) چھوٹا بہ نسبت واحد کی ہی پس ح (لا)  
 مثبت ہی جب لا = ۲ ہو اور ح (لا) منفی ہی جب لا = ۰ اسی طرح مساوات ح (لا) = ۰

کی ایک قیمت ۱۰ اور ۲ کے درمیان واقع ہوتی ہے  
 اسی طرح اگر آخر رقم ر بجائی - ر کے ہو اور نسبت ہو اور چھوٹا  $\frac{۱}{۲} + ۲$  ق سی ہو تو مساوات  
 ح (لا) = ۰ کی ایک قیمت ۱۰ اور ۲ کے درمیان واقع ہوگی

### انہوں باب قیمتین محدود اور ناطق

(۱۱۲) قیمت ناطق اور محدود سی مراد اس قیمت سی ہی جو ایک محدود صورت میں بیان ہوگی  
 یا کہ ہو اور مقیم ہر ہم نہ ہوں اب ہم یہ بتا لینگے کہ مساوات کی مثال جب اعداد ناطق ہوں  
 خواہ صحیح یا کہ تو ناطق اور محدود قیمتین مساوات کی آسانی سی دریافت ہو سکتی ہیں  
 دفعہ ۳۵ میں ہم فی بیان کیا ہی کہ اگر مساوات کی مثال ناطق ہوں اور سب صحیح نہ ہوں  
 تو اوپر مساوات کی ہمت بدل کر ایک ایسی مساوات بنا سکتی ہیں کہ جسکی سب مثال صحیح ہوں



$$\frac{ع}{۱} + \frac{ع}{۱-ع} + \frac{ع}{۲-ع} + \frac{ع}{۳-ع} + \frac{ع}{۴-ع} + \dots + \frac{ع}{۱} = ۱$$
 اسی معلوم ہوا کہ  $\frac{ع}{۱}$  ایک صحیح عدد ہوا اس کو  $ق$  سی تعبیر کرو اور اس کو  $۱$  پر تقسیم کرو تو  

$$ق + \frac{ع}{۱-ع} + \frac{ع}{۲-ع} + \frac{ع}{۳-ع} + \frac{ع}{۴-ع} + \dots + \frac{ع}{۱} = ۱$$
 اسی معلوم ہوا کہ  $\frac{ع}{۱-ع}$  ایک صحیح عدد ہونا چاہیے اس کو  $ق$  سی تعبیر کرو اور  $۱$  پر تقسیم کرو  
 تو  $ق + \frac{ع}{۱-ع} + \frac{ع}{۲-ع} + \frac{ع}{۳-ع} + \frac{ع}{۴-ع} + \dots + \frac{ع}{۱} = ۱$  اسی نتیجہ پر نوبت پہنچ گئی کہ  $ق + \frac{ع}{۱-ع} + \frac{ع}{۲-ع} + \frac{ع}{۳-ع} + \frac{ع}{۴-ع} + \dots + \frac{ع}{۱} = ۱$

اسی معلوم ہوتا ہے کہ مساوات  $ح (۱۱) =$  کی ایک قیمت  $۱$  کی ہونی کی واسطی پھر شرائط ضرور ہیں کہ  
 آخر رقم مساوات کی  $۱$  پر پوری تقسیم ہونی ہو اور خارج قسمت  $۱$  پر جو سطح حاصل ہوا اگر  $۱$  کا امثال  
 زیادہ کر کے حاصل جمع بھی  $۱$  پر پوری تقسیم ہوا اور اس سطح جو قیمت حاصل ہوا اور  $۱$  کا سر جو مساوات میں  
 زیادہ کریں تو حاصل جمع ایسا حاصل ہو کہ وہ  $۱$  پر پوری تقسیم ہو اور اس سطح  $۱$  کی جائیں جب تک کہ  
 $۱$  - قیمتیں پر نوبت پہنچی اور خارج قسمت جو حاصل ہوا اس پر  $۱$  - کا سر زیادہ کرو تو حاصل جمع پورا  
 $۱$  پر تقسیم ہوا اور خارج قسمت  $۱$  - ہو

اگر ان تمام مراتب میں سے کسی مرتبہ پر شرط مطلوب ٹوٹ جائے تو جان لینا چاہیے کہ صحیح عدد  $۱$  قیمت  
 مساوات کی نہیں ہے

(۱۱۵) ہم نے دفعہ گذشتہ میں اول شرائط کو دریافت کیا ہے کہ جنکی موافق صحیح عدد  $۱$  مساوات  
 $ح (۱۱) =$  کی ایک قیمت بنتا ہے اب یہ بات اسانی سے دریافت ہوتی ہے کہ اگر ان شرائط  
 میں سے آخر شرط پوری ہو تو صحیح عدد  $۱$  قیمت مساوات کی ہوگا اس واسطے کہ آخر شرط سطح تعبیر ہوتی ہے

$$\frac{ع}{۱} + \frac{ع}{۱-ع} + \frac{ع}{۲-ع} + \frac{ع}{۳-ع} + \frac{ع}{۴-ع} + \dots + \frac{ع}{۱} = ۱$$

اب اگر یہ صحیح ہو تو  $۱$  میں ضرب دینی مساوات  $ح (۱۱) =$  کی قیمت  $۱$  کا ہونا ظاہر ہے

مساوات کی تمام محدود اور نامتناہی قیمتوں کی دریافت کرنی کی واسطی آخر رقم کے تمام پوری  
 باطنی والی مقدار میں دریافت کریں اور اس بات کو جانچیں کہ وہ شرائط دفعہ ۱۱۷ کو پورا کرتی

۷۵  
۵ میں اس امتحان کی محنت کم ہو جائیگی اگر ہم اول قیمت اور منفی قیمتوں کی حدود غائی دریافت کریں  
ان حدود غائی کی دریافت کرنی ہی اور صحیح پر از مالیش کی ضرورت نہیں رہی جو ان حدود غائی  
سی مضمون فقط او نہیں اعداد کی از مالیش کرنی پڑے گی جو ان حدود غائی کی درمیان واقع ہونگی  
(۱۶) مثلاً اس مساوات کو لو کہ

$$۵ + ۵ + ۵ + ۵ - ۱۴ - ۱۴ - ۲۰ - ۱۴ = ۰$$

یہاں بموجب فتحہ ۸۴ کی +۱۳ - ۳۰ اعلیٰ حدود غائی ہی اور لاکھ جگہ - دیکھو سی مساوات حاصل ہوتی ہے

$$۲ (۵ - ۵) + ۲ (۱۴ + ۱۴ - ۲۰) + ۲ (۵ - ۵) = ۰$$

اسی ۵ اعلیٰ حدود غائی قیمتوں کی ہی اسی معلوم ہوا کہ تمام قیمتیں مساوات کی  
۱۴ اور - ۵ کی درمیان واقع ہوتی ہیں اور - ۱۴ کی پوری باطنی دلی صحیح ان حدود غائی کی مساوات  
جو واقع ہیں اب ان اعداد کا امتحان کرتی ہیں کہ کونسی اور نہیں سی قیمتیں ہیں

|      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|
| ۴ -  | ۲ -  | ۱ -  | ۱    | ۲    | ۴    |
| ۴ +  | ۸ +  | ۱۴ + | ۱۴ - | ۸ -  | ۴ -  |
| ۱۴ - | ۱۲ - | ۲ -  | ۳۴ - | ۲۸ - | ۲۴ - |
| ۲ +  | ۴ +  | ۲ +  | ۳۴ - | ۱۴ - | ۴ -  |
| ۱۲ - | ۱۰ - | ۱۲ - | ۵۲ - | ۳۰ - | ۲۲ - |
| ۳ +  | ۵ +  | ۱۲ + | ۵۲ - | ۵ -  |      |
| ۲ +  | ۴ +  | ۱۳ + | ۵۱ - | ۱۴ - |      |
| ۱ -  | ۳ -  | ۱۳ - | ۵۱ - | ۴ -  |      |
| ۴ +  | ۲ +  | ۸ -  | ۴۴ - | ۲ -  |      |
| ۱ -  | ۱ -  | ۸ +  | ۴۴ - | ۱ -  |      |

اول سطر میں وہ پوری باطنی دالی آخر رقم کی لکھی ہیں جنکا امتحان منظور ہے  
اور ہر ایک باطنی دالی کی نیچی وہ نتائج لکھی ہیں جو اسکی امتحان پیدا ہوتی ہیں مثلاً پورا باطنی دالہ ۵  
آخر رقم ۴ کو ۴ پر تقسیم کرتی ہیں اور خارج قیمت - ۴ کو اسکی نیچی لکھتی ہیں اب اسکو لاکھ ۲ پر  
زیادہ کرتی ہیں اور حاصل جمع - ۲ کو نیچی لکھتی ہیں اب اسکو ۴ پر تقسیم کرتی ہیں - ۴ خارج قیمت لکھتے ہیں

اسکو بھی لکھتی ہیں اور سپر لاکا - ۱۹ زیادہ کرتی ہیں تو - ۲۲ حاصل ہوتی اور یہ ۴۲ پر تقسیم نہیں ہوتا اسی معلوم ہوا کہ قیمت نہیں ۱۲ اور - ۱۲ کی موافق تمام شرائط پوری ہوتی ہیں۔ اسلئے یہی اعداد قیمتیں مساوات کی ہیں اور ۱۱ اور - ۱۱ سے پہلی شرط کو پورا نہیں کرتے یعنی اخراج قسمت - انہیں ہی اسو طعی بہرہ اعداد قیمتیں نہیں ہیں

یعنی آخر خارج قسمت - انہیں ہی اس واسطی پہا اعداد قسمتیں نہیں ہیں  
پس اوات مفروضہ کو  $(u) =$  سی تعبیر کریں تو ہم دریافت ہو گا کہ  $(u-1)(u+1)(u+2)$

ایک جز ضربی ح (۱۱) کا ہی اور اسی بہم معلوم ہو گا کہ دوسرا جز ضربی لا + لا + ا ہے  
(۱۱) اکثر + اور - کو پوری باطنی والوں میں نہیں امتحان کرتے کیونکہ اول کا بہم امتحان  
کرنا کہ وہ قیمنین میں یا نہیں اس طرح سامان ہی کا ورنہ لاکھ کی جگہ سات معلوم میں کہہ کر دیکھ لیں  
اگر کوئی فوت لاکھ سات مفروضہ میں ہی مفقود ہو تو اس کی جگہ اسی فوت کو لکھ لو اور صفر اس کا  
سر نہا لو دفعہ ۱۵ دیکھو

جیسا کہ کیسے خاص اعداد و ارب و س... محدود اور ناطق قیمتیں مساوات ح (لا) =

کتابی چون تو به حققتو گزینا باقی سزای کیه قیمتمس مگر راتی من ح (لا) کو حاصل ضرب (لا-لا-لا-لا-ب-لا-س).....

پتھریسم کرنا اور اس خارج قسمت کو سر (لا) سی تعبیر کرنی میں اور پھر مساوات سر (لا) =  
اس ترکیب کو عمل میں لائیں ہی طریقہ کے مراعت سی مساوات ج (لا) = کی مکرر قیمتیں دیکھا  
جوسکتی ہیں اور یہ معلوم ہو سکتا ہی کہ ہر ایک قیمت مکرر کتنی دفعاتی ہے

ج (۵)۔ کی مساوی قیمتوں کی ازمایش باب چہارم سے ہو سکتی ہے

(۱۱۸) دفعہ ۱۱۴ میں بوساوات کی گئی ہی اوسکی اول رقم کا سر واحد ہے اگر اس اوات کی جگہ ایسی ساوات لین کر جسین کوئی سر صحیح ع۔ اول رقم کا ہو تو شرائط تحصیلین فقط اخراجات منہ بہ من فرق پڑے گا کہ۔ اکی جگہ۔ ع۔ جمل ہو گا مثلاً فرض کرو کہ

$$\cdot = 15 - 113 + 212 - 21$$

بہار ۱۵ + ۱۱ علی حد نای نسبت فیثون کی بموجب فہ ۹ کی اور بموجب فہ ۲۲ کی کوئی منفی قیمت نہیں ہے

اور امتحان کرنی ہی معلوم ہونا ہی کہ قیمت نہیں ہی پس اخر رقم کی پوری باقی دانی ۵ اور ۵ ہیں  
تو ان کی ترتیب یہ ہوگی کہ

|    |     |
|----|-----|
| ۳  | ۵   |
| ۵- | ۳-  |
| ۸  | ۱۰  |
|    | ۲   |
|    | ۱۰- |
|    | ۲-  |

پس قیمت ہی اس واسطے کہ اسی تمام شرائط پوری ہونی میں آخر خارج قیمت - ۲ ہے

اور ۳ قیمت نہیں کیونکہ ۸ پورا ۳ پر تقسیم نہیں ہوتا

(۱۱۹) اخر رقم کی پوری باقی دانی کا شمار اصول مفضلہ ذیل کی موافق ہی ہو سکتا ہے

فرض کرو کہ مساوات ح (۱۱) = کی قیمت ۱ ہو لا کی جگہ م + ۱ کر کہو تو ۱ - م ایک قیمت

۱ کی ایسی ہوگی جو مساوات ح (م + ۱) = کی شرائط کو پورا کرگی جو رقم ۱ سے

کچھ لگاؤ نہیں رکھتی وہ ح (م) ہی اور تمام مثال کی صحیح میں اگر ح (۱۱) کی سب مثال

صحیح ہوں اور م ہی صحیح ہو دفعہ ۱۲ کو دیکھو پس اگر ۱ صحیح ہو تو ۱ - م ہی صحیح ہوگا اور

اس واسطے ح (م) کو مجبورے دفعہ ۱۱ کی تقسیم کر لگا پس کوئی صحیح مقدار ۱

جو اخر رقم ح (۱۱) کو بڑا باقی ہو اور ح (م) کو ۱ - م نہ پورا تقسیم کرنی ہو تو وہ

مقدار خارج از امتحان ہو سکتی ہے

یہاں کوئی صحیح منفی اور مثبت ہو سکتا ہی - ۱۱ اور - ۱ قیمتیں اس کی مقرر کرنی سی ح (م)

۱ - ۱۱ اب میں بڑی ہسانی ہو جاتی ہے

دفعہ ۱۱ کی مساوات معلوم کو متنبہ لو یہاں ۱۱ اخر رقم کو پورا باقی ہے لیکن

۱۱ + ۱ پورا ح (۱ - ۱) کو جو ۹ ہی نہیں تقسیم کرنا ہی ایسی یہ قیمت مساوات کی نہیں ہو سکتی

اب بہ مثال ۱۱ - ۲۰ + ۱۱۱۴ + ۱۰۰ = ۱۰ کی کوئی اس مساوات کے منفی قیمت جو

دفعہ ۱۲ کی نہیں ہی اور اس کو اس صورت ۱۱ - ۲۰ + ۱۱۱۴ (۱۱ - ۱) میں لکھو ہے

ہم دیکھتے ہیں کہ ۲۰ اعلیٰ حد خائی قیمت قیمتوں کی ہی آخر قیمت کی قیمت پوری بائنی والے جو ۲۰ سے کم ہوں ۲ و ۷ و ۵ و ۸ و ۱۰ اور ۱۴ بین انہیں سی ۵ و ۸ و ۱۰ قیمتیں نہیں ہیں اسلیٰ کہ  
 ح (۱) = ۱۲۵۵ اور یہ ۵ - ۸ یا ۱ - ۱۰ یا ۱ - ۱۰ پر پور انہیں تقسیم ہوتا  
 پس آخر رقم کی پور بائنی والی محتاج کے واسطی ۲ و ۷ اور ۱۴ بین انہیں سی معلوم ہوگا کہ ۴ قیمت ہے  
 (۱۲۰) ایک مثال قیمت کمسونا طوں کی یہاں ۴ - ۱۱ - ۱۱ + ۴ - ۴ = ۰ سے یعنی

$$۱۱ - ۱۱ + ۴ - ۴ = ۰$$

اول مساوات میں ۱۱ = ۴ کے رکھنا کہ مساوات بنت بدل کہ بائنی ہو جائے کہ تمام مثال  
 صحیح ہوں دفعہ ۳ کو دیکھو پس

$$۱۱ - ۱۱ + ۱۱ - ۲۲ = ۰$$

$$یعنی ۱۱ + ۱۱ - ۱۱ + ۱۱ - ۲۲ = ۰$$

بموجب دفعات ۱۰ اور ۹ کے تمام قیمتیں بائنی مساوات کی درمیان ۱۱ + ۱۱ اور ۲۲ - (۱۱ + ۲۲)  
 واقع ہوں اور ہم محتاج سی دریافت کرتی ہیں کہ ۱۱ اور ۱۱ قیمتیں ہیں پس صرف پوری تقسیم کنائی  
 آخر رقم کی ۱۱ و ۲ و ۲ و ۳ و ۴ بین اور نیز ح (۱) = ۲۰ اور یہ  
 ۱۱ - ۱۱ - ۲ - ۱۱ پر پور ہی نہیں تقسیم ہوتی اسی معلوم ہوا کہ ۱۱ اور ۲ خارج الامتحان ہیں  
 اور موافق سابق کی ترتیب عمل کی بہ ہوگی

|      |     |      |     |
|------|-----|------|-----|
| ۴ -  | ۳ - | ۲ -  | ۳ - |
| ۴ -  | ۲۲  | ۱۲ - | ۵ - |
| ۵ -  |     | ۱ -  | ۴ - |
| ۱۴ - |     | ۱۰ - | ۴ - |
| ۴ -  |     | ۵ -  | ۳ - |
| ۱ -  |     |      | ۱ - |

پس ۳ اور ۴ قیمتیں ہیں اور چونکہ ۱۱ = ۴ کے تو ۲ اور ۲ قیمتیں صلی مساوات کی حاصل ہوں



## نواں باب تنزل معادلات

اس باب میں ہم اس بات کی تحقیقات کریں گے کہ کس طرح سے ایک مساوات کا حل اسی کم درجہ کی مساوات کے حل پر بعض صورتوں میں موقوف ہو سکتا ہے جبکہ اوکلی قیمتوں کی ارتباط معلوم ہوں جس عمل سے پہلے دریافت ہوتا ہے اس کو تنزل معادلات کہتے ہیں

(۱۲۲) جب دو مساواتوں میں ایک قیمت یا کئی قیمتیں مشترک ہوں تو اس قیمت یا قیمتوں کو دفعتاً فرض کرو کہ (۱۱) = ۱۰ اور مع (۱۱) = مساواتیں ہیں جنکی ایک قیمت مشترک ہے

پس مع (۱۱) اور مع (۱۱) میں لا - ایک جز فرضی مشترک ہوگا اسی معلوم ہوا کہ مع (۱۱) اور مع (۱۱) کی دفعی مشترک اعظم میں لا - ایک جز فرضی ہوگا اور علیٰ ہذا القیاس ہر ایک جز فرضی مشترک مع (۱۱) اور مع (۱۱) کا دفعی مشترک اعظم کا ہی جز فرضی ہوگا اور کوئی اور جز فرضی اس دفعی اعظم میں نہیں واقع ہوگا پس اسی معلوم ہوا کہ اگر مع (۱۱) اور مع (۱۱) کا دفعی اعظم دریافت کریں اور اس کو برابر صفر کے لکھ دیں تو اس مساوات کی قیمتیں مطابقت نامہ معادلات مع (۱۱) = ۱۰ اور مع (۱۱) = کے مشترک قیمتوں سے مل سکتے

اگر مع (۱۱) اور مع (۱۱) میں کوئی جز فرضی مکرر آتا ہے تو دفعی اعظم میں بھی مکرر لکھا جائے گا (۱۲۳) تمثیلاً فرض کرو کہ یہ دو مساواتیں ہیں

$$۷۱ + ۳۳ - ۵۵ - ۱۱۴ = ۸$$

$$۷۱ + ۳۳ - ۵۵ + ۱۱۰ - ۸ = ۰$$

۱ ان مساواتوں کی دائیں طرف کی اکان کا دفعی اعظم  $۷۱ + ۳۳ - ۵۵ = ۸$  ہی اور اگر اس کو برابر صفر کے لکھیں تو لا = ۱۴ اور لا = ۲ کی حاصل ہوگا

پس دو مساواتوں کی مشترک قیمتیں ۱۲ اور ۴ ہیں

(۱۲۴) فرض کرو کہ مساوات مع (۱۱) = کی دو قیمتیں ۱ اور ۲ ہیں جنکا ربط باہمی ہم کو معلوم ہے کہ مع (۱۱) + ق ب = رابطہ مطلوب یہی کہ ان قیمتوں کو دریافت کریں

جو کہ مساوات ح (۷) = کی اور ب قیمتیں میں توح (۱) = اور ح (ب) =  
لیکن ب =  $\frac{۱}{۱۰} \times ۱۰۰$  اس لیے ح (۱) =  $\frac{۱۰۰}{۱۰}$  =

پس معادلات ح (۷) = اور ح (۱) = کی مشترک قیمت ۱ ہے  
تو وہ جو ب پر نقد گزشتہ کی دریافت ہو سکتی ہے اس طرح تو دریافت ہو گیا اور اس ارتباط  
ع ۱ + ق ب = رسی ب دریافت ہو جائیگا اسی معلوم ہونا ہی کہ حاصل ضرب اجزاء ضربی  
لا - ۱ اور لا - ب پر ح (۷) پورا تقسیم ہو جائیگا اور خارج قسمت کو برابر صفر کی لکھیں تو ایک  
مساوات ایسی حاصل ہو جائیگی کہ اوسے باقی قیمتیں مساوات ح (۷) = کی دریافت ہو جائیں گی  
(۱۲۵) مثلاً فرض کر کے یہ مساوات ہو

$$۱۰ - ۷ + ۳ - ۱۱ + ۱۰ = ۰ \quad (۱)$$

اور یہ ہم کو معلوم ہے کہ اوسکی دو قیمتیں ۱ اور ب میں ارتباط باہمی یہ ہے کہ ب = ۱ + ۱۲  
مساوات (۱) میں لاکے جگہ ۱ + ۱۲ رکھو تو

$$۰ = ۱۰ - (۱ + ۱۲) + ۳ - ۱۱ + (۱ + ۱۲) = ۰$$

$$\text{یعنی } ۱۰ - ۱۱ + ۳ - ۱۱ + ۱۲ = ۰$$

$$۰ = ۲ + ۱۱ - ۱۱ - ۳ = ۰ \quad (۲)$$

اب معادلات (۱) اور (۲) کی بائیں طرف کی ارکان کا دفع عظم ۲ ہے پس ۱ = ۲  
اور اس لیے ب = ۵ یعنی مساوات مفروضہ کے دو قیمتیں ۱۲ اور ۵ ہیں تو اسی قیمت ہو گیا کہ

$$۱۰ - ۷ + ۳ - ۱۱ + ۱۰ = (۱۰ - ۵) (۲ - ۱) (۵ + ۱)$$

پس اور قیمتیں ۱۱ - (۱) ہیں

(۱۲۶) یہ ہو سکتا ہے کہ ایک اور زوج قیمتوں کا مسہ اور مسہ میں بہا ارتباط ہو کہ مسہ + ق مسہ =

تو اس صورت میں جمعی ج (۷) اور ح (۱) کی دفع عظم میں لاکے دو درجہ کا مجموعہ بن

اجزاء ضربی لا - ۱ اور لا - مسہ ملے تو اگر قیمتیں ۱ اور ب دونوں مساوات ح (۷) =

مین کرارائین توح (۱۱) اور ح (۱۰) دفعی اعظم مین جز ضربی ۱۱ - ۱ مکرر ایک

(۱۲۶) علی العموم ہمہ فرض کرو کہ مساوات ح (۱۱) = ۰ کی دو قیمتیں ۱ اور ب مین باہمی ارتباط ہی کہ

ب = سر (۱) تو معادلات ح (۱۱) = ۱۰ اور ح (سر ۱۱) = ۰ کی ایک قیمت مشترک ۱ ہوگی

اور اس مشترک قیمت کو بموجب دفعہ ۱۲۲ کے دریافت کر سکتی ہیں

(۱۲۸) ایک صورت ایسی بھی ہے کہ او مین دفعہ ۱۱۲ اور ۱۲۶ کی کچھ اعداد مساوات مفروضہ کی حل کرنی ہیں کہ

مثلاً مساوات ح (۱۱) = ۰ ہو اور ہم ہم کو معلوم ہی کہ او کی قیمتوں کی زوج واقع ہوتے ہیں

اور ہر ایک زوج ۱ اور ب قیمتوں کا اس ارتباط ۱ + ب = ۲ کی شرائط کو پورا کرتا ہے

تو بموجب دفعہ ۱۲۴ کے ہم معادلات ح (۱۱) = ۰ اور ح (۲ - ۱) = ۰ کی مشترک

قیمتیں دریافت کر نیے مگر ان قیمتوں مین بالکل مطابق ہوگا اس واسطی کہ بموجب فرض کے

ح (۱) = ۰ یعنی ح (۲ - ب) = ۰ اور ح (ب) = ۰ یعنی ح (۲ - ۱) = ۰

پس قیمتیں ۱ اور ۲ دونوں مشترک دونوں مساواتوں مین ہیں اور علی هذا القیاس اوزار دفعہ قیمتوں

مشترک دونوں مساواتوں مین ہیں اس واسطی دونوں مساواتوں مین تطبیق نامہ ہوگی

(۱۲۹) جس مساوات پر دفعہ بالا مین بحث ہوئی ہے او کی تنزل کی بہت طریق ہیں مگر ہم ان مین صرف

دو لکھتی ہیں تاکہ طالب علموں کو اس بات کی مضمون مین متیق ہو جائے

اول ہم عمل اسطرح کرتی ہیں کہ فرض ۱ - ب = ۲ ی تو ہم کو ایک ساتھ ہی مساوات حاصل ہوگی

ح (۱) = ۰ = ۱ + ب = ۲ - ۱ - ب = ۲ ی

ان مساواتوں مین سی دوسری تیسری مساوات سی ۱ = ی + اس قیمت کو مساوات اول مین رکھو

نوس (ی + ۱) = ۱۰ مساوات سی قیمتیں ی کی دریافت ہو سکتی ہیں اور ہر ان قیمتوں کی مطابق

۱ اور ب کی قیمتیں بھی دریافت ہو جائیں گی اب یہ بات یہاں ہی کہ مساوات ح (۱ + ی) = ۰ مین ہم ایک

ثابت کر دیں کہ او مین ی کی جفت قوا ہیں پس اگر ہم ی کو مقدار مجہول خیال کریں تو اس مساوات

کا درج مساوات مفروضہ کی درجہ سی نصف ہوگا

فرض کرو کہ مساوات مفروضہ کا ایک قیوتوں کا اور ب ہی اور دوسرا زوج سہ اور صہ ہی تو

$$ح (لا) = (لا - ا) (لا - ب) (لا - ب) (لا - ب) (لا - ص) \dots$$

$$ح (ی + ر) = (ی + ر - ا) (ی + ر - ب) (ی + ر - ب) (ی + ر - ص) \dots$$

$$= (ی + ر - ا + ا - ب + ب - ص + ص - \dots) (ی + ر - ب + ب - ص + ص - \dots) \dots$$

$$= [ (ی - ا - ب - ص - \dots) ] \dots$$

یعنی ح (ی + ر) میں حرف ی کی جفت قوادین

در حقیقت اس مسئلہ میں کچھ غیر قیوتوں اور ب کی درمیان نہیں کی گئی اس لیے مساوات ایسی ہی جیسا کہ پہلی  
 $\frac{1}{2} - ب$  ہو تو ضرور ہم کو یہ توقع ہو سکتی ہے کہ  $\frac{1}{2} - ب$  ہی اس کی قیمت ہوگی اور نفس الامر میں یہی ثابت ہوگا

دوہم اس طرح بھی عمل کرتی ہیں کہ ی = اب کے فرض کریں تو

$$(لا - ا) (لا - ب) = لا - (ب + ا) لا + اب = لا - ۲ - لا + ی$$

اگر ی کی مناسب قیمت فرض کریں تو لا - ۲ - لا + ی ایک جز فرضی ح (لا) کا ہوگا ح (لا) کا

لا - ۲ - لا + ی پر تقسیم کی جاؤ جب تک کہ باقی کی صورت لا + ق پیدا ہو اس میں ع اور ق

جملی کی ہیں اور ان میں لا شامل نہیں ہی ای معلوم ہوا کہ ضروری شرط اس امر کی کہ

$$ح (لا) کا جز فرضی لا - ۲ - لا + ی ہی سہ ہی کہ ع = ۱۰ اور ق = -$$

بموجب دفعہ ۱۲۲ ی کی قیمت ایسی دریافت کرو کہ وہ دونوں مساواتوں کی شرائط کو پورا کرے

اور پھر اور ب کو ان مساواتوں

$$ا + ب = ۲ \quad ی = اب$$

سے دریافت کرو

(۱۳۰) فرض کرو کہ مساوات ح (لا) = کی تین قیمتیں اور ب اور س کا یہ ارتباط بھی

معلوم ہی کہ ع + ا + ق + ب + ر = ص مطلوب یہ ہے کہ ان قیمتوں کو دریافت کریں

چونکہ اور ب اور س مساوات ح (لا) = کی قیمتیں ہیں تو ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے کہ

ح (ا) = ح (ب) = ح (س) = پس

$$\therefore = \frac{(ص - ع - ۱ - ق - ب)}{۱} ح = (ب) ح = (۱) ح$$

ابا خرد و ما و اتون سی ب کو دور کو تو ایک پیماسوات ہم کو حاصل ہوگی کہ سر (۱) =

پس مساوات ح (لا) = ۰ اور سر (لا) = ۰ کی ایک مشترک قیمت ہے اور یہ بہ محبوب

دفعہ ۱۲۲ کے دریافت ہو سکتا ہے

(۱۳۱) اس باب کی مضمون سے متعلق چند مثالیں اب ہم لکھتی ہیں

(۱) اسماوات

$$= \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} + \dots$$

کی قیمتیں سلسلہ حسابیہ میں ہیں اور ان کو دریافت کرو

ان قیمتوں کو  $a + b + c + \dots + 2b$  سے تعبیر کرو

تو بموجب دفعہ ۴۷ کے

$$(1 + \overline{b_1}) + \dots + (1 + b_2) + (1 + b) + 1 = c$$

$${}^2(\overline{a-b}+1) \dots + {}^2(b+1) + {}^2(b+1) + {}^21 = {}^2c_2 - {}^2c_1$$

یعنی  $e = 1 + \frac{n(1-n)}{2}$

$$2 \cdot \frac{(1-n^2)(1-n)n}{4} + 1 \cdot (1-n)n + 1 \cdot n = 2 - 2n$$

بیسویں باب البحر کا دیکھو

ماحصل کے مجذور میں ہی دوسرے ماحصل کے گنتی کو تفریق کرو تو یہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{E(1-n)}{12} = E \cup 2 - E(1-n)$$

پس ب اسی دریافت ہو گیا اور ب کی معلوم ہوئی سی ۱ معلوم ہو جائیگا

(۲) مساوات ۱۱ + ۱۳ + ۱۵ + ۱۷ + ۱۹ + ۲۱ + ۲۳ + ۲۵ + ۲۷ + ۲۹ + ۳۱ + ۳۳ + ۳۵ + ۳۷ + ۳۹ + ۴۱ + ۴۳ + ۴۵ = ۱۰۰۰ کی دو قیمتیں ہیں جو مقدار میں میسر آئے۔  
 ورا دہ کی علامتیں مختلف ہیں ان کو دریافت کرو یہاں اگر لاکھ علامت بدلی دین تو مساوات

جے ایم ایسی اصل ہوگی جسکی اور مساوات مفروضہ کی ایک قیمت مشترک دونوں میں ہوگی یعنی مساوات مفروضہ اور اس مساوات

$$= 4N - 2N^2 + 2N^2 - 2N^2 - 2N^2$$

کی ایک قیمت مشترک ہے پس موجب فہم ۱۲ کی ان دونوں باتوں کے بائیں طرف کی ارکان کا  
وفق اعظم دریافت کریں یا دونوں مساواتوں کو تفریق کر لیں تو

• = 1144-1144

اسواسطی ۱۱ = ۰ یا ۱۴ = ۱۴

پہلی سی کوئی قیمت نہیں حاصل ہوئی اور دوسری لا = ۴ حاصل ہوتا ہے اور ۴ اور ۴- مساوات مفروضہ کی قیمتیں ہیں

(۳) مساوات ۳۰۴ - ۱۱۴ + ۲۱۴ - ۱۱۴ + ۴ = کی دو قیمتیں ہیں جنکا حاصل ضرب ۲۱۴ ہی اونکو دیا کرتا ہے  
فرض کرو کہ ایک قیمت ہی تو  $\frac{1}{2}$  دوسرے قیمت ہوگی اسی معلوم ہوا کہ

$$(1) \quad \bullet = 4 + 519 - \frac{1}{2}4 + \frac{3}{2}19 - \frac{5}{2}3$$

$$= 4 + \left(\frac{r}{3}\right) 19 - \left(\frac{r}{3}\right) 4 + \left(\frac{r}{3}\right) 19 - \left(\frac{r}{3}\right) 3 \text{ اور}$$

یعنی  $4 - {}^2_3 38 + {}^3_3 34 - {}^2_3 52 + {}^1_3 8 = 0$

$$(Y) = 2N + 5 \cdot 64 - 5 \cdot 18 + 5 \cdot 14 - 5 \cdot 36$$

معادلات (۱) اور (۲) کے بائیں طرف کی ارا کا ان کا دفعہ مشترک سے  $144 \div 144 = 1$

اسکو برا بھروسہ کر کے لکھ کر تم کو بھیج دیا۔ حال ہوتا ہی کہ  $x = 1$  یا  $x = 4$  پس  $x = 1$  اور  $x = 4$  مطلوبہ قیمتیں ہیں۔

دسوان باب معادلات متکافیه

(۱۳۲) مساوات تکافید اسی کہتی ہیں کہ اگر مقدار انجول بدل کر متکافی اپنا ہو جائے تو یہی وہ مساوات نہ بدلی اسی معلوم ہو کہ اگر قیمت ایسی مساوات کی ہو تو وہ کاسمتکافی یعنی اڑبھی اور مساوات کی قیمت ہو اس ہم کہنے کے کہ مساوات تکافید کا حل موقوف



مقدار میں برابر اور علامت میں مختلف ہوں مگر او سکی ساتھ یہ بھی شرط ہے کہ اگر مساوات بھت درجہ کی ہو تو رقم متوسط کا سر صفر ہو

(۱۳۴) اول نوع کی مساوات متکافئہ طاق درجہ کی ایک قیمت کا - ا ہونا بادی النظر میں ظاہر معلوم ہوتا ہے پس اگر ح (لا) = مساوات کو تعبیر کری توح (لا) پورا لا + اب تقسیم ہوگا دفعہ ۴ کو دیکھو فرض کرو کہ سر (لا) خارج قسمت ہو تو سر (لا) = مساوات متکافئہ بھت درجہ کی ہوگی اور او سکی آخر رقم مثبت ہوگی

دوسری نوع کی مساوات متکافئہ طاق درجہ کی ایک قیمت کا + ا ہونا بادی النظر میں ظاہر معلوم ہوتا ہے پس اگر ح (لا) = مساوات کو تعبیر کری تو مساوات ح (لا) پورا لا - اب تقسیم ہوگا دفعہ ۴ دیکھو اور فرض کرو کہ سر (لا) خارج قسمت نکلتا ہے تو سر (لا) = مساوات متکافئہ بھت درجہ کی ہوگی اور او سکی آخر رقم مثبت ہوگی

دوسری نوع کی مساوات متکافئہ بھت درجہ کی ایک قیمت کا + ا اور دوسرے قیمت - ا ہوگی یہ امر ظاہر بادی النظر میں معلوم ہوتا ہے پس اگر ح (لا) = مساوات کو تعبیر کری

توح (لا) پورا لا - ۲ ب تقسیم ہوگا دفعہ ۳۳ کو دیکھو اور فرض کرو کہ سر (لا) خارج قسمت نکلتا ہے تو سر (لا) = مساوات متکافئہ بھت درجہ کی ہوگی اور او سکی آخر رقم مثبت ہوگی

(۱۳۵) خاص قیمتوں کی باب میں جو کچھ اوپر بیان ہوا وہ بدیہی ہی مگر او سکا اثبات بھی ان سے اخذ صورت میں دوسری نوع کی جو مساوات متکافئہ بھت درجہ کی بیان ہوئی اس پر خیال کرو

فرض کرو کہ ح (لا) = مساوات کو تعبیر کرتا ہے اب ہم کو یہ معلوم ہے کہ ح (لا) - یا کہ ح (لا) = - لا ح (لا) اور یہ بھی ہم کو معلوم ہے کہ ح (لا) پورا

لا - اب تقسیم ہوتا ہے اب ہم کو ثابت کرنا یہ ہے کہ خارج قسمت اب جملہ ہی کہ اول اور آخری ارقام متساوی الابداد کے امتثال برابر میں

ہم کو معلوم ہے کہ ح (لا) = - لا ح (لا)







گیارہواں باب معادلات شناسی یا دور مٹی

(۱۴۱) جس مساوات کی صورت  $ل = ۱$  ہو اور اوس میں مقدار معلوم ہو تو اسکو معادلہ امیر یا مساواتی کہتے ہیں۔

اس مساوات کی قیمتیں سب مختلف ہوتی ہیں کیونکہ  $ل = ۱$  کا اول جملہ شتق  $ل = ۱$  ہے اور کوئی قیمت ایسی لاکھ نہیں ہو سکتی کہ  $ل = ۱$  اور  $ل = ۱$  کو معدوم کریں دفعہ ۱۰ دیکھو

(۱۴۲) اگر  $ل = ۱$  ہو تو  $لا = ۱$  یعنی برابر اور کی ن مرتبہ کی نزول کے ہی لیکن مساوات

$ل = ۱$  کی قیمتیں بموجب دفعہ ۳۳ کی ہیں اور بموجب دفعہ ۱۴۱ کے سب مختلف ہیں

اسی ہر ایک بڑا نتیجہ نکلتا ہے کہ ہر ایک مقدار جبریہ کی ن مرتبہ کی نزول ن طرح کی ہوتی ہیں

مقدار جبریہ سی مراد ہی ہمارے حقیقی مقدار سی یا مقدار تخلی سی جمع + حق =  $ل = ۱$  کی صورت کہتی ہیں

(۱۴۳) فرض کرو کہ مقدار کی ن مرتبہ کی نزول میں سی ایک کو طبعیہ کرنا ہی تو  $لا = ۱$  پس مساوات

$ل = ۱$  میں  $لا = ط$  کے فرض کرو تو  $لا = ۱$  ہو  $سیو = ۱$  ہو  $ل = ۱$  ہو

اسی معلوم ہوا کہ  $لا = ۱$  یعنی برابر ایک کے ن مرتبہ کے نزول کی برابر ہے اور

$لا = ط = ۱$  لیکن  $لا = ۱$  سیو اسطی  $لا = ط$  پس

پس کسی مقدار جبریہ کی ن مرتبہ کی نزول اس طرح دریافت ہو سکتی ہیں کہ ان میں سی ایک کو

واحد کے ن نزولوں میں متواتر ضرب دیں

(۱۴۴) اب فرض کرو کہ ایک حقیقی مثبت مقدار ہی اور ہم کو مساوات  $ل = ۱$  ہو

اور مساوات  $ل + ۱ = ۱$  کے حل کرنی ہیں اور فرض کرو کہ ط حسابی قیمت ۱ کے

ن نزول کے ہی جو ہمیشہ ضابطہ ثانی کی استعانت سے نکل سکتی ہی خواہ حقیقی یا تقریباً

جبر مقابلہ کا جو میسوان باب دیکھو اب  $لا = ط$  کی فرض کرو تو مساواتیں مفروضہ کی یہ صورت حاصل

کہ  $ل = ۱$  اور  $ل + ۱ = ۱$  اور یہ مساواتیں علم مثلثی جملوں کے استعانت سے

حل ہو سکتی ہیں تب میسوان باب علم مثلث کا دیکھو اب ہم ان مساواتوں کو غیر علم مثلثی جملوں کے استعانت سے

اور اگر ہم ان کو جبر مقابلہ سی علی العموم نہیں حل کر سکتے ہیں مگر یہی اونکی باب میں نتائج مستطیل کے ہیں

(۱۴۵) اگر مساوات  $۱ - ۱ = ۰$  کی قیمت سے ہو تو مساوی ہوگی قیمت ہوگی جس میں صحیح مثبت یا منفی ہے

اسو اسطی کہ  $(س) = (س) = (س) = ۱ = ۱ = ۱$

(۱۴۶) اگر مساوات  $۱ + ۱ = ۰$  کی مساوی قیمت ہو تو مساوی ہوگی قیمت ہوگی جس میں صحیح مثبت یا منفی ہے

اسو اسطی کہ  $(س) = (س) = (س) = ۱ = ۱ = ۱$  اگر مطلق ہو

(۱۴۷) اگر  $۱$  اور  $۱$  متساوی ہوں تو معادلات  $۱ - ۱ = ۰$  اور  $۱ - ۱ = ۰$  کی کوئی مشترک

قیمت سوا واحد کے نہیں ہو سکتی

فرض کہ  $۱$  اور  $۱$  دو صحیح ایسی ہوں کہ جس میں یہ ارتباط ہو کہ  $۱ - ۱ = ۰$  ایسے

صحیح ہمیشہ جبر مقابلہ کی استعانت سے دریافت ہو سکتی ہیں جو ایسا ان باب جبر مقابلہ کا دیکھو

اور فرض دو نمساواتوں کی مشترک قیمت ط ہی پس  $۱ = ۱$  اسو اسطی

$۱ = ۱$  اور  $۱ = ۱$  اسو اسطی  $۱ = ۱$  اسی معلوم ہوا کہ  $۱ - ۱ = ۰$  یعنی  $۱ = ۱$

(۱۴۸) مگر  $۱$  عدد اولی ہوا اور مساوات  $۱ - ۱ = ۰$  کی کوئی قیمت سے ہو تو مگر واحد نہ ہو

تو تمام قیمتیں مساوات کی اس سلسلہ سے وسطہ وسطہ... سے حاصل ہوں گیں

اسو اسطی کہ بموجب دفعہ ۱۴۵ کے یہ مقدار تمام قیمتیں مساوات کی ہیں اسو اسطی اب ہم کو مرین ہوتا ہے

باقی رہا کہ ان میں سے کوئی سی دو برابر نہیں ہیں اگر برابر ہونا ممکن ہو تو فرض کرو کہ  $۱ = ۱$  پس

$۱ = ۱$  پس اسی ثابت ہوا کہ  $۱ - ۱ = ۰$  اور  $۱ - ۱ = ۰$  قیمت مشترک

سوا واحد کی کہتی ہیں اور یہ بموجب دفعہ ۱۴۵ کی ناممکن ہے اور چونکہ  $۱ - ۱ = ۰$  کی قیمت مشترک ہے

اسو اسطی وہ متساوی ہیں

(۱۴۹) اگر  $۱$  عدد اولی نہ ہو اور سے کوئی قیمت مساوات  $۱ - ۱ = ۰$  ہو تو

بموجب ۱۴۵ کے یہ تو درست ہی کہ کوئی قیمت سے کی ایک قیمت مساوات کی ہی لیکن یہ

نہیں ہے کہ متواتر قواسم سے قیمتیں مساوات کی ہاتھ لگ جائیں مثلاً فرض کرو کہ  $۱ - ۱ = ۰$  اور

مساوات  $۱ - ۱ = ۰$  کی قیمت سے ہی تو مساوات  $۱ - ۱ = ۰$  کی یہی قیمت سے ہے



(۱۵۱) دوم فرض کرو کہ اجزاء ضربی متساویں میں مکرر واقع ہوں اور  $n = 10$  ہو جو  
اس میں  $10$  ہو و ص کو ی قوت اعداد  $10$  نے  $m$  و  $c$  کی ہیں تو یہ پہلی دست ہوگا اگر ہم  
تو قیمتیں مساوات  $10^1 = 1$  کی اور قیمتیں مساوات  $10^2 = 10$  کی اور قیمتیں مساوات  $10^3 = 100$  کی  
ہو اور موافق ہر ایک نظم کی ان قیمتوں کا ہر ایک ممکن حاصل ضرب نکالیں تو مساوات  $10^1 = 1$  کی تمام قیمتیں  
حاصل ہو جائیں گی مجموعہ  $10^4$  کی ہر ایک نظم کی قیمتیں کچھ فرق نہ ہوں گے اور ہر ایک قیمت کو قواسم  
تعبیر ہوں جس کو خواہ مخواہ مقرر کر لیں

اگر  $n$  میں تین مختلف اعداد اولیٰ سی زیادہ اعداد اولیٰ ہوں تو یہی عمل طرح ہوگا  
(۱۵۲) اکثر دستور کی بات ہی کہ ایک دعویٰ مساوات  $10^1 = 1$  میں  $n$  زیادہ لکھا کرتی ہیں جس میں  
 $n$  قوت کسی عدد اولیٰ کی ہوتی ہی اگرچہ پہلے عمل کچھ بکارا نہ ہیں ہی مگر ہم اس کو یہاں لکھتی ہیں  
مثلاً فرض کرو کہ  $n = 3$  اور  $m$  عدد اولیٰ ہی اور مساوات  $10^1 = 1$  کی ایک قیمت  $1$  سی اور مساوات  
 $10^2 = 10$  کی قیمت  $10$  سی اور مساوات  $10^3 = 100$  کی قیمت  $100$  سی تو مساوات  $10^1 = 1$  کی  
قیمتیں اس حاصل ضرب کی ارقام ہوں گیں کہ

$$(1 + 10 + 100 + \dots + 10^{n-1}) (1 + 10 + 100 + \dots + 10^{m-1})$$

اول کوئی سی رقم اس حاصل ضرب کی ایک قیمت مساوات کی ہی ہو اسطرح کہ فرض کرو  $n = 3$  اور  
کسی رقم کو تعبیر کرتی ہی تو  $(10^2 + 10 + 1) = 100 + 10 + 1 = 111$   
دوم اس حاصل ضرب کی کوئی ہی دو قیمتیں برابر نہیں ہو سکتیں اسطرح کہ اگر یہ ممکن ہو تو فرض کرو کہ  
 $10^2 + 10 + 1 = 100 + 10 + 1 = 111$  اور  $10^1 + 10 + 1 = 10 + 10 + 1 = 21$  اس میں

$$111 = 21 \quad \text{اور} \quad 100 + 10 + 1 = 10 + 10 + 1$$

$$100 + 10 + 1 = 10 + 10 + 1 \quad \text{اور} \quad 100 + 10 + 1 = 10 + 10 + 1$$

کی مشترک قیمت سواد واحد کے نہیں ہو سکتی  
 (۱۵۳) مثلاً دفعہ بالا کیچہ عظمت نہیں رکھتی اسلی کو جو مال او سین کرنے پڑنے ہیں  
 وہ علی العموم نہیں ہو سکتی فرض کرو مساوات لا-۱ = کو حل کر سکتے ہیں اور سہ کو  
 دریافت کرتی ہیں تو تمام مقادیر ا د سہ و سہ ۰۰۰ سہ - ا قیمتیں مساوات  
 لا-۱ = کی تو اس طرح ہم کو قیمتیں دریافت ہو جائینگے لیکن سہ کے دریافت کرنی کی واسطے  
 ہم مساوات لا-۱ = کو حل کریں یعنی ملاحظہ کو دریافت کریں اس میں سہ = ملاحظہ  
 اور اس دریافت کرنے کے واسطے کوئی ترکیب جبر مقابلہ میں نہیں ہے  
 مثلاً مساواتیں لا-۱ = اور لا-۱ = کو اگر ہم حل کر لیں تو مساوات لا-۱ =  
 کی یہی تمام حل موجود ہے دفعہ ۵ کی حاصل ہو جائینگے اگر ہم مساوات لا-۱ = ملاحظہ کر لیں  
 کو موجب دفعہ ۵۲ کے نہیں حل کر سکتی ہم کو صرف تین قیمتیں مساوات اول کی اور پانچ قیمتیں  
 مساوات دوم کی حاصل ہونگی

(۱۵۴) معادلات لا-۱ = اور لا-۱ + = کی علمی حل کرنی کی ترکیب ہم لکھتی ہیں  
 ان بہت بڑا نہیں ہے اگر ان کوئی قوت ۲ کی ہو تو ان کے حل کے جذور نکالنی سی دینا کر لیں  
 اور ہم ثنائی کی بار بار جذور نکالنی کی ترکیب جبر مقابلہ میں لکھی دفعہ ۵۲ کو دیکھو  
 پس اس صورت میں تمام قیمتیں معلوم ہو جائیں گیں اگر ان = ع م  
 اس میں ع = ۲ تو لا = کے فرض کرو تو مساواتیں لا-۱ = اور لا-۱ + =  
 کی بائیں گیں کہ ۲ = اور لا-۱ + = پس اگر معلوم ہو جا تو لا = اس طرح دیا ہوگا  
 کہ ہم دفعہ مکرر جذور نکالیں

(۱۵۵) مساوات لا-۱ = میں فرض کرو کہ ن طاق عدد ہی یعنی ن = ۲ م + ۱ تو مساوات  
 لا-۱ + = کی ایک حقیقی قیمت ہوگی یعنی ۱ + اس کے واسطے کو کسی منفی قیمت نہیں ہے  
 اور اگر لا کو برابر کسی مقدار کے سواد واحد کی قرار دیں تو لا م + ۱ کی بھی واحد کی

برابر نہیں ہوگا۔ جس معلوم ہوا کہ مساوات کی حقیقی قیمت ایک ہی ہے  $1 + 2^m - 1$ ۔ اکولا۔ اچھے علم اور مساوات مختصر اور تخیل ہو کر یہ پیدا ہوگی جس کو کل کرنا چاہی کہ

$$= 1 + u + u^2 + \dots + u^{r-1} + 1 - u^r + u^r$$

یہ مساوات متکافینہ ہی اور اسکا حل م درجہ کی مساوات کے حل پر موقوف ہے

(۱۵۹) مساوات ۱-۰ = فرض کرو کہ کن جفت ہی اور  $\frac{2}{3}$  مساوات کے

حقیقی قیمتیں صرف دو+ اور- امین اور لاکم- کو لا- اور لا+ کے حاصل ضرب لا- ا-

بہ تقسیم کرتے ہیں پس جو مساوات حل کرنی پڑے گی وہ بہ مختصر اور خوبصورت ہو کر حاصل ہوگی

$$= 1 + \frac{1}{U} + \dots + \frac{1}{U^{N-2}} + \frac{1}{U^{N-1}}$$

یہ مساوات متکافیه ہی اور اس کا حل م-۱ درجہ کی مساوات کی حل پر موقوف ہے

مساوات لاگ ۱ = کو  $(1 - \frac{1}{n}) (1 + \frac{1}{n}) =$  کی صورت میں لکھ کر عم سانی سی کر سکتی ہیں۔

اور ہر سکول میں ایک داتون لا۔ ۱۔ اور لا + ۱۔ میں کر لین یا اوس ترکیب کو

عمل میں لائیں جو دفعہ ۵۴۷ میں بیان ہوئی

(۱۵۴) مساوات ۱۴ = - میں فرض کرو کہ ن طاق ہی اور ن = ۲ م + ۱ اور مساوات

لا م + ا + ا = ۱۔ کی صرف ایک حقیقی قیمت یعنی - ۱ ہے اور لا م + ا + ا کو

۱۱۔ پرتعظیم کریں تو مساوات مختصر تحویل ہو کر حل کرنی کی واسطی یہ پیدا ہوگی کہ

$$= 1 + u - \frac{u^2}{2} + \dots - \frac{u^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{u^{2n}}{(2n)!} - \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

یہ مساوات متکافیه ہی اور اسکا حل م درجہ کی مساوات کے حل پر موقوف

اگر ن طاق مساوات  $1 + 1 = 2$  میں ہوا اور ہم لاکو - لاسی تبدیل کریں تو مساوات

لا ۱۔ = حاصل ہوگی اگر ہم چاہیں تو اس دوسرے مساوات کو حل کر سکتے ہیں اور جو قیمتیں نکلیں ان

علامتین بدل دین تو اول مساوات کا حل حاصل ہو جائیگا

(۱۵۸) اگر مساوات  $1 + \dots + n = 0$  میں  $n$  بھت فرض کریں تو مساوات کی کوئی حقیقی



قیمت نہیں ہوگی بہ مساوات مساوات تکافیہ ہی اور اس کا حل اس مساوات کی حل ہوتا ہے جس کا درجہ نصف اصلی مساوات کی درجہ سی یا مساوات کی حل کرنی میں دفعہ ۴۵ کی ترکیب کا مین لاؤ

(۱۵۹) پس چار دفعت گذشتہ سی یہ بات ثابت ہوتی ہے کہ معادلات مفروضہ کا حل

ایسی معادلات کی حل پر موقوف ہو سکتا ہے جس کا درجہ نصف معادلات مفروضہ کی درجہ سی ہو

ہر ایک صورت میں حقیقی قیمتوں کی موافق جو اجزاء ضربی ہوتی ہیں ان کو دور کرنی میں اور لا + ۱ = ۱ سی

لکھتے ہیں اور ایک مساوات کی حاصل ہوتی ہے اب بہ مساوات کی تمام حقیقی قیمتیں ہو سکتی ہیں

اس واسطے کہ فرض کرو کہ سہ + صہ ۱ = ۱ ایک تخیلی قیمتوں میں سی لاکھ ہو تو اس کی مطابق ہی کی قیمت بہ ہوگی کہ

$$\text{سہ} + \text{صہ} ۱ = ۱ \quad \text{یعنی} \quad \frac{\text{سہ} + \text{صہ} ۱}{۱} = ۱ \quad \text{یا} \quad \frac{\text{سہ} + \text{صہ} ۱}{۱} = ۱$$

اب ہم بڑی حقیقی مقدار ہی نہیں کہ نہ شہ طیکہ بہ ثابت ہو کہ سہ + صہ ۱ = ۱ اب بہ ہم ثابت کرینگے کہ

سہ + صہ برابر اکے ہے

چونکہ سہ + صہ ۱ = ۱ ایک قیمت مساوات لا = ۱ کی ہی تو بموجب دفعہ ۴۵ کے

سہ - صہ ۱ = ۱ بھی قیمت مساوات کی ہوگی پس

$$(\text{سہ} + \text{صہ} ۱) = ۱ \quad \text{اور} \quad (\text{سہ} - \text{صہ} ۱) = ۱ \quad \text{یا} \quad ۱ = ۱$$

اب ضرب دینی (سہ + صہ ۱) = ۱ اس واسطے سہ + صہ ۱ = ۱

اور سہ + صہ مثبت ہی اسلئے سہ + صہ برابر اکے ہوا

(۱۶۰) اب ہم بعض مثالیں معادلات

$$\text{لا} = ۱ + ۱ = ۱ \quad \text{اور} \quad \text{لا} = ۱ - ۱ = ۱ \quad \text{کی لکھتے ہیں}$$

(۱) لا = ۱ - ۱ اسی معلوم ہوتا ہے کہ (لا - ۱) (لا + ۱) = ۱

اسی معلوم ہوا کہ قیمتیں اور ۱ = ۱ - ۱ یا پس بہ قیمتیں + اکے

تین جزو الکعب میں اور ان کی علامتیں بدلتی ہیں کو تین جزو الکعب - اکے حاصل ہوتی ہیں

یا اس کو یوں بیان کرو کہ مساوات لا + ۱ = ۱ کی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں

(۲)  $\lambda + 1 = 0$  میں  $\lambda + \frac{1}{\lambda} = 0$  کی رکھو تو یہ حاصل ہوگا کہ  $\lambda^2 - 1 = 0$

پس  $\lambda = \pm 1$

اسیو  $\lambda + 1 = 0$  میں  $(\lambda + 1 + \lambda^2) (1 + \lambda^2 - \lambda^3) = 0$

ان دوم درجوں کی مساواتوں کی قیمتوں کی دریافت کرنی ہی حل کامل ہو جائیگا

(۳)  $\lambda - 1 = 0$  اسی حاصل ہوتا ہے کہ  $(\lambda - 1) (\lambda^2 + \lambda^3 + \lambda^4 + 1) = 0$

اسی معلوم ہوتا ہے کہ مساوات  $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$  یعنی

$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$  کی حل ہونی چاہی پس  $\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

اسیو  $\lambda - 1 = 0$  میں  $(\lambda - 1) (\lambda^2 + \lambda + 1) (\lambda^3 - 1) = 0$

ان دوم درجہ کی مساواتوں کے حل کرنی چاہیے اور قیمتوں کی علامتیں بالذیل

تو وہ مساوات  $\lambda^2 + 1 = 0$  کی قیمتیں بن جائیں گی

(۱۶۱) اگر ہم مساوات  $\lambda - 1 = 0$  کی حل کرنی میں کوشش کریں تو ہم مساوات  $\lambda^2 + 1 = 0$  کی تیسری

درجہ کی حاصل ہوگی اور اگر مساوات  $\lambda^2 - 1 = 0$  کے حل کرنے میں سعی کریں تو یہی چوتھی

درجہ کی مساوات حاصل ہوگی اب اگر دو بالوں میں بتلائینگے کہ تیسری اور چوتھی درجہ

کی مساواتیں کس طرح حل ہوتی ہیں یہ بات معلوم ہو جائیگی کہ حل کی ترکیبیں عملاً کسی کام کی نہیں

ہوتیں جبکہ معادلات جکو حل کرنی میں تمام حقیقی قیمتیں رکھنی ہوں جیسی کہ یہاں صورت ہی

جس پر بحث موافق دفعہ ۱۵۴ کے ہم کرتے ہیں

(۱۶۲) اگر مساوات  $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$  کی صورت کی ہو تو ہم مساوات درجہ دوم

موافق حل کر کے  $\lambda$  کی قیمتیں دریافت کرتے ہیں اور یہ موافق اس باب کی ترکیبوں کے

$\lambda$  کی قیمتیں دریافت ہو سکتی ہیں

اب بیان ہم ایک دعویٰ دو مقادیر  $\lambda$  کی حاصل ضرب کے باب میں ثابت کر کے اس بات کو ختم کرتے ہیں۔

(۱۶۳) فرض کرو کہ  $\lambda$  اور  $\mu$  دو مقادیر جبر یہ ہوں اور  $n$  صحیح مثبت ہوں تو ہم

کی مختلف قیمتیں ہونگیں اور کتاب کی مختلف قیمتیں ہوائی دفعہ ۱۲۲ کے ہونگیں  
اسی معلوم ہوا کہ کتاب اور کتاب کی اصل ضرب کی مختلف قیمتوں زیادہ قیمتیں نہیں ہو سکتیں  
اور اب ہم یہ ثابت کریں گی کہ او سکی اتنی قیمتیں نہیں ہو سکتیں بشرطیکہ  $m$  اور  $n$  متباہن نہ ہوں  
اور اس دعویٰ سے پہلی اس دعویٰ کو ثابت کریں گی کہ کتاب اور کتاب کی اصل ضرب کے مختلف  
قیمتیں  $m$  اور  $n$  کی دو وضعات اقل کی برابر ہوتی ہیں

فرض کرو کہ کتاب کی قیمتوں میں ایک قیمت ہو تو تمام قیمتیں کتاب کی  $m$  یا  $n$  میں ہونگیں  
اور فرض کرو کہ کتاب کی قیمتوں میں سے ایک قیمت ہو تو کتاب کی تمام قیمتیں  $m$  یا  $n$  میں  
داخل ہونگیں اسی معلوم ہوا کہ تمام قیمتیں اصل ضرب کے  $m \times n$  یا  $n \times m$  میں داخل ہیں  
اسی طرح اصل ضرب کے مختلف قیمتوں کی تعداد وہی ہوگی جو  $m \times n$  یا  $n \times m$  کی ہے فرض کرو

کہ  $m$  اور  $n$  کا دو وضعات اقل ہی تو  $(m \times n)$  = ۱  
پس  $m \times n$  برابر واحد گر مرتبہ کے نزول کی ہی ہو اسطرح مختلف قیمتوں کے  
زیادہ قیمتیں نہیں ہو سکتیں

لیکن ہم کو یہ ثابت کرنا باقی رہا کہ  $m \times n$  فی الحقیقت مختلف قیمتیں رکھتا ہے  
فرض کرو کہ  $m$  و  $n$  دونوں اعظم  $m$  اور  $n$  کا ہی اور  $\frac{m}{n}$  = لو پس  $m$  کی تو قیمتیں  $m$   
کی  $m$  قیمتوں میں داخل ہیں اور  $m \times n$  کی قیمتیں اصل ضرب کے قیمتوں میں کہ  $m$  کی  
تو قیمتوں اور  $m$  کی قیمتوں کے اصل ضرب کے مختلف ارقام ہیں اور یہ قیمتیں سب مختلف ہونگیں ہوا کہ  
کہ کو قیمتوں میں سے دو قیمتیں  $m$  اور  $n$  میں سے  $m$  اور  $n$  دو قیمتیں ہیں تو  $m$   
برابر  $m$  سے کہ نہیں ہو سکتا اسطرح کہ اگر  $m$  سے  $m$  =  $m$  تو  $m$  سے  $m$  =  $m$  دائیں طرف کا رکن

ایک قیمت مساوات ۱ = ۱ کی ہی اور بائیں طرف کا رکن ایک قیمت مساوات ۱ = ۱ کی ہی  
اور ان مساواتوں کوئی قیمت مشترک ہوا واحد کے بموجب دفعہ ۱۲۷ کے نہیں ہو سکتی  
(۱۴۷) بعض اوقات دفعہ گذشتہ کے اصل اصول اس طرح بیان کیے جاتے ہیں کہ  $m \times n$  = ۱

اگر  $x^3 + px^2 + qx + r = 0$  کو مختصر الحدین بنائیں تو شمار کنندہ ایک صحیح عدد ہوگا اور نسبت شمار ہوگا  
 اس طرح  $\frac{p}{3} = \frac{1}{3}$  اور اسکی مختلف قیمتیں ہیں یہ ترکیبات کی مصلحت ہی کیونکہ جبر مقابلہ  
 میں جو معمولی مسئلہ مقدار میر ہم کا لکھا گیا ہے وہ مقدار میر ہم کی حسابیہ قیمتوں کے واسطی  
 ثابت کیا گیا ہے اس واسطی اسی پر ارتباط  $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$  موافق اوس معنی  
 کے جو یہاں لکھی گئی ہیں نہیں ثابت ہوتا ہے

### بارہواں باب معادلات کعبی

(۱۴۵) مساوات درجہ دوم کی حل کرنے کی باب میں بحث کرنی یہاں فضول ہی اسکی اور مفصل  
 حال جبر مقابلہ میں بیان ہو چکا ہے اس باب میں فقط درجہ سوم کی مساواتوں کی جو معادلات کعبی  
 کہتے ہیں بحث ہوگی

دفعہ ۱۴۵ میں ہم فی پہلے ثابت کیا ہے کہ مساوات مفروضہ کی ایسی ہیئت بدل سکتی ہے کہ اس میں سری رقم  
 جس مساوات کعبی میں دوسری رقم نہ ہو اسکی قیمتوں کی بہت خصوصیات جملی بہ نسبت کامل مساوات  
 کعبی کے قیمتوں کی ہوتی ہیں ایسی ہم یہ فرض کر لیتی ہیں کہ جن کعبی مساواتوں کو ہم حل کرتی ہیں ان میں  
 دوسری رقم نہیں ہے جس عمل کو اب ہم لکھینگے اسکا نام کارڈن کا حل کعبی مساوات کا ہے

(۱۴۶) مساوات  $x^3 + px + q = 0$  کو حل کرو

فرض کرو کہ  $q = 3$  اور  $p = 4$  اور بالفضل دو مقداریں معلوم ہیں  
 اسکو مساوات مفروضہ میں لاکر جگہ رکھو تو

$$(x + 1)^3 + 4(x + 1) + 3 = 0$$

$$\text{یعنی } x^3 + 3x^2 + 6x + 8 = 0 \quad (x + 1)^3 + 4(x + 1) + 3 = 0$$

ہم فی صرف دو مقداریں اور ی کی باب میں ایک پہلیات فرض کی ہے کہ انکا مجموعہ مساوات  
 مفروضہ کی ایک قیمت ہو اسلی ہم کو اختیار ہے کہ کوئی دوسریات بھی اوںکی باب میں فرض کریں  
 وہ در مقداریں معلوم ہیں اوںکی واسطی دوسرا طریق مقرر کر سکتی ہیں فرض کرو کہ  $q = 3$  اور  $p = 4$ ۔

$$r^3 + r^2 = 0$$

ی کی قیمت ارقام میں مستخرج کرو تو

$$r^3 + r^2 = 0$$

$$r^3 + r^2 = 0$$

یعنی

$$r^3 + r^2 = 0$$

$$r^3 + r^2 = 0$$

اور نیز لا = د + ی اب ہم د اور ی کے قیمتوں میں اوپر کی علامت لین تو  
اور نیچے کی لین تو دونوں صورتوں میں ایک ہی نتیجہ حاصل ہوگا صفائی کی واسطی ہم اوپر کی علامت لین تو

$$r^3 + r^2 = 0$$

پس لا کے واسطی جو جملہ ہی او میں دو جزو الکعب ہیں اور ہر مقدار کے تین جزو الکعب ہیں تو اب  
ہم کو یہ دریافت کرنا چاہی کہ بالفعل کونسی جزو الکعب لینی چاہی فرض کرو کہ

$$r^3 + r^2 = 0$$

تو بموجب فہ ۱۶۰ کے اگی تین جزو الکعب اور سہ اور سہ ہیں اب فرض کرو کہ

$$r^3 + r^2 = 0$$

م سہ اور م سہ ہونگے اور -  $r^3 + r^2 = 0$  کے جزو الکعبوں میں سی

ایک جزو الکعب کو تغییر کرتا ہی تو اور جزو الکعب ن سہ اور ن سہ ہیں

لائے جملہ میں جو جزو الکعب واقع ہوتی ہیں ان میں سی ہر ایک کی واسطی اس کی تین قیمتوں میں

ہر ایک قیمت لگائیں تو ہم کو کل نو قیمتیں حاصل ہونگیں لیکن کعبی مساوات کی صرف تین

قیمتیں ہوتی ہیں تو اسی نتیجہ نکلتا ہی کہ اون نو قیمتوں میں سی صرف تین قیمتیں

میں داخل رکھتی ہیں اور باقی خارج ہیں اور فی الحقیقت عمل حل میں د ی = -  $r^3 + r^2 = 0$

ایک شرط ہی پس جو قیمتیں اس شرط کو پورا کریں وہی قیمتیں مساوات میں داخل رہتی ہیں  
فرض کرو کہ  $m$  اور  $n$  ایسی معرکہ گئی ہیں کہ وہ شرط  $m = n$ ۔ فی کو پورا کرتے ہیں  
تو ہم کو یہ حاصل ہوگا کہ  $d = m$  اور  $y = n$  کے قیمتیں داخل پذیر ہو گئیں اور  $d = m$   
اور  $y = n$  کی بھی حاصل ہوگا اور  $d = m$  اور  $y = n$  کے بھی حاصل ہوگا  
کیونکہ دو صورتوں میں ارتباط  $d = n$ ۔ فی کی شرائط پوری ہوتی ہیں مگر کوئی اور زوج  
قیمتوں کا داخل نہیں ہو سکتا تمثیلاً فرض کرو کہ  $d = m$  اور  $y = n$  تو  $d = n$ ۔ فی  
کی حاصل ہوگا اور  $d = n$ ۔ فی کی برابر نہیں حاصل ہوگا اور ایسی ہی اور زوج قیمتوں سی  
 $d = n$ ۔ فی یا  $d = n$ ۔ فی کے حاصل ہوگا اور  $d = n$ ۔ فی نہیں حاصل ہوگا  
اسلئے سوار اور  $n$  ازواج قیمتوں کی جنگی دخل کی کیفیت اوپر بیان کر ائی ہیں اور کوئی زوج  
قیمتوں کا شرائط کو ایفا نہیں کر لگا

(۱۶۷) تمثیلاً فرض کرو کہ  $۳ + ۷۷ + ۲۰ = ۲۰$ ۔ میان  $y = ۱۴$  اور  $d = ۲۰$  پس

$$۱۰ = \frac{1}{3}(۱۰۸ + ۱۰) + \frac{1}{3}(۱۰۸ - ۱۰)$$

عددی حساب لگانے سے یہ حاصل ہوگا کہ

$$(۱۰ + ۱۰۸) \frac{1}{3} = ۳۲۷۲ \text{ اور } (۱۰۸ - ۱۰) \frac{1}{3} = ۳۲۷۲$$

پس اسی ہم گمان کرتی ہیں کہ  $۲ = ۲$  کے ہوگا اور امتحان سے یہ معلوم بھی ہوگا کہ  $۲ = ۲$  کی ہے  
اب در دو قیمتوں کی بیان کرنی کی واسطی موافق دفعہ گذشتہ کی عمل کرنے کے یہ بہتر ہوگا  
کہ ہم مساوات کا فنزل مساوات درجہ دوم کی طرف کریں چونکہ  $۲$  قیمت مساو  
مفروضہ کی ہے اسلئے  $۳ + ۷۷ + ۲۰ = ۲۰$  پورا  $۲ = ۲$  پر تقسیم ہوگا اور یہ ہم کو دریافت ہوگا کہ

$$۱۰ = (۲ - ۷۷) (۲ + ۷۷ + ۱۰)$$

اسلئے باقی دو قیمتیں مساوات کی اس مساوات

$$۱۰ = ۱۰ + ۷۷ + ۲$$

کے حل کرنے سے یہ دریافت ہو گئیں کہ

$$-1 \pm 1 \text{ اور } -1 \pm 1 = 3-1$$

مثال گذشتہ میں ہم امتحان سی یہ ثابت کرتے ہیں کہ

$$(108 + 10) = 118 \text{ اور } (108 - 10) = 98 \quad 1 = 1$$

پس اس طرح قیمت ۲ بغیر نزول نکالنی کی دریافت ہو گئی کوئی عمل جبر یہاں نہیں آتا اور سی علیٰ اعمام  
جزء الکعبین جملہ ۱ + ۲ کی صورت کا محدود صورت میں نکال لیں دفعہ ۳۱۰ جبر بمقابلہ کی دیکھو  
اسلمی (۱ + ۲) کی قیمت دریافت کرنی کی واسطی ضابطہ جملہ شائی کو کام میں لا کر ثابت  
سلسلہ دریافت کرنی ہیں اور اس حالت میں اگر ۲ کی قیمت ہو تو اس سلسلہ کی انضمامی  
بنانی کی واسطی سلسلہ کو قوا مضاعف میں پہلا ۱ اور اگر ۲ بڑا ۱ سے ہو تو سلسلہ کو  
۱ کی قوا مضاعفہ میں پہلا ۱ میں جبر بمقابلہ کا باب ۳۶ اور ۳۷ دیکھو

(۱۶۸) دفعہ ۱۶۶ میں ہم نے لکھا ہی کہ گو لا کی واسطی بطور نو قیمتیں نکلتی ہیں مگر اون میں سے تین  
مساوات میں فضل رکھتی ہیں اور باقی خارج ہیں اب ان نو قیمتوں کی واقع ہونی کی دلیل یہ ہے کہ ارتباط  
۱ = ۲ - ۱ فرض کیا گیا تھا اور ہر اسکی صورت عمل کے اندر ۲ = ۱ - ۲ میں تبدیل کی  
گئی تھی اب اس اخراج ارتباط میں کچھ تبدیل نہ ہوگا اگر

$$1 = 2 - 1 \text{ کے حل کرنے میں}$$

۱ = ۲ - ۱ کو دریافت ہوتی ہیں اون میں سے تین تو اس مساوات سے متعلق ہوتی ہیں اور تین مساوات

$$1 = 2 - 1 \text{ سے اور تین مساوات } 1 = 2 - 1 \text{ سے}$$

(۱۶۹) لمبھی مساوات مفروضہ کی قیمتوں کی صورت پر اب ہم خاکش کرتے ہیں ۱ اور ۲ کو

ہم اصلی مفادیر فرض کرینگے ۱ اور ۲ کے واسطی جملی کیا تو اصلی ہون گے یا خیالی

اول فرض کرو کہ یہ جملی اصلی ہیں تو ۱ اور ۲ کے جزء الکعبین کی حسابی قیمتوں کو

فرض کرو کہ ۱ اور ۲ میں تغیر کرتی ہیں تو لمبھی مساوات مفروضہ کی اصل قیمت یعنی ۱ اور ۲

اور باقی دو قیمتیں م سے + ن سے اور م سے + ن سے ہو گئیں اور سہ کی قیمت مندرجہ کرنے سے جدا گانہ یہ قیمتیں ہو گئیں کہ

$$- \frac{1}{2} (م + ن) + \frac{1}{2} (م - ن) = ۳$$

$$اور - \frac{1}{2} (م + ن) - \frac{1}{2} (م - ن) = ۳$$

اور یہ تین قیمتیں بن بشرطیہ م = ن کے نہ ہو اور جب م = ن تو ملکی مساوات کی دو برابر قیمتیں ہو گئیں اور ہر ایک انہیں ہی برابر م یا - ن کے ہوگی اس شرط ضروری جسی یہ تحقیق ہو چکا کہ م = ن یعنی ۳ = م کے یہی کہ  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = ۳$  -

بالعکس کے اگر ملکی مساوات کی قیمتیں تمام اصلی ہوں اور غیر م کے ہوں تو ۳ اور ۳ کی قیمتیں ہو گئیں

یہ فرض کرو کہ ۳ اور ۳ کی جملی خیالی ہیں یعنی فرض کرو کہ  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$  منفی مقدار ہے تو جو چیز ۴ کی ہم کو یہ دریافت ہو گا کہ ۳ اور ۳ میں سی ہر ایک جزو ملکی خاص صورت کا ہو گا اس واسطے

ہم فرض کرتے ہیں کہ م = لو + مو = ۳ اور چونکہ ۳ اور ۳ میں فرق علامت جاذب ہے اس واسطے

ن = لو + مو = ۳ اس صورت میں ملکی مساوات مفروضہ کی تمام اصلی قیمتیں ہیں یعنی

$$لو + مو = ۳ + لو - مو = ۳ یعنی ۲ لو ہے$$

$$(لو + مو = ۳) + (لو - مو = ۳) سے یعنی - لو - مو = ۳$$

$$اور (لو + مو = ۳) + (لو - مو = ۳) سے یعنی - لو + مو = ۳$$

(۴) ملکی مساوات کا حل ہو گا ۲ ن حصہ کا ہی اسے عملاً ایسی صورت میں کچھ فائدہ نہیں حاصل ہوتا

کہ مساوات کی قیمتیں اصلی اور غیر مساوی ہوں اس واسطے کہ اس حالت میں جملہ ۳ اور ۳ کے

تخلی ہوتی ہیں اور گو ہم اس بات کو جانیں کہ او کی جزو ملکی جو کہ بہت ہی گہری ترکیب فی

لکائی کی از روی علم صاحبین ہی پس ایسی صورت میں ہم کو قیمتیں صورت جبرہ میں معلوم

ہو جاتی ہیں مگر ان کا حساب عددی نہیں ہو سکتا اسلی وہ حساباً کچھ وقعت نہیں

رکھتی مثلاً یہ مساوات لو کہ



$$3 - 15 - 2 = 0$$

یہاں  $r = -2$  اور  $q = -15$  سے ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$1 = \sqrt[3]{(12 - 11 + 2)} + \sqrt[3]{(12 - 11 - 2)}$$

$$\text{یعنی } 1 = \sqrt[3]{(1 - 11 + 2)} + \sqrt[3]{(1 - 11 - 2)}$$

اب یہاں ظاہر ہے کہ کوئی جزو الکعبہ گنی کا طریق نہیں ہی امتحان سے ثابت ہوتا ہے کہ

$$1 - 11 + 2 = \sqrt[3]{(1 - 11 + 2)}$$

$$1 - 11 - 2 = \sqrt[3]{(1 - 11 - 2)}$$

$$\text{پس } 1 = 1 - 11 + 2 + 1 - 11 - 2 = -22$$

پس یہ قیمت ہی اب اور قیمتیں دفعہ ۱۴۹ اسی دریافت ہو سکتی ہیں یا اس طرح عمل کرنی سی کہ

$$3 - 15 - 2 = (1 - 11)(1 + 11 + 121)$$

پس ہم کو یہ مساوات حل کرنی پڑے گی کہ  $1 + 11 + 121 = 133$  اور اس کی قیمتیں  $133 \pm 2$  ہیں

$$\text{اب مساوات } 3 - 15 - 2 = 0 \text{ پر خیال کرو}$$

$$\text{یہاں } r = -2 \text{ اور } q = -15 \text{ پس}$$

$$1 = \sqrt[3]{(1 - 11 + 1)} + \sqrt[3]{(1 - 11 - 1)}$$

یہ امتحان سے ثابت ہوتا ہے کہ

$$1 = \sqrt[3]{(1 - 11 + 1)} + \sqrt[3]{(1 - 11 - 1)}$$

$$1 = \sqrt[3]{(1 - 11 + 1)} - \sqrt[3]{(1 - 11 - 1)}$$

$$\text{پس } 1 = \sqrt[3]{(1 - 11 + 1)} + \sqrt[3]{(1 - 11 - 1)} = 1 - 11 + 1 + 1 - 11 - 1 = -22$$

اور باقی قیمتیں دریافت ہو سکتی ہیں اور وہ یہ ہیں کہ

$$\frac{1 - 11}{133} \text{ اور } \frac{1 - 11}{133}$$

(۱، ۱) جو صورت کعبی مساوات کی ایسی کوئی قیمتیں صاف اور غیر صاف ہیں اور صورت کعبی مساوات کی ایسی کوئی قیمتیں

اور بعض اوقات یہ کہتی ہیں کہ اس صورت میں قاعدہ کارڈن کا نہیں چلتا ان جملوں سے بہت  
معلوم ہوتی ہے کہ جس میں ایسی صورت تین نمایاں ہوتی ہیں کہ ان کی حساب لگائی میں بڑی قوت اور دشواری  
عاید ہوتی ہے لیکن ضابطہ جملہ ثنائی کی استعانت سے جملہ  $ع + ق$  کی صورت کی جملہ کی تقریب  
ہم دریا کرتی ہیں اگر ق تعداد پہنچا  $ع$  سے ہو تو  $(ع + ق)$  کو سلسلہ اضافی میں

موافق قوا و متضادہ  $ق$  کے پہلا میں جبر مقابلہ ۳۴ باب دیکھو پس

$(ع + ق)$  کو تقریباً  $ع + ق$  کے صورت میں لاسکتی ہیں

اور  $(ع - ق)$  کو تقریباً  $ع - ق$  کی صورت میں

اور مجموعہ ان جزو الکعبون کا  $ع$  ہوگا لیکن اگر ق تعداد بڑا  $ع$  سے ہو تو ہم اس طرح عمل کریں کہ

$$ع + ق = ع - (ق - ع)$$

اسی معلوم ہوا کہ  $(ع + ق)$   $(ع - ق)$  کے

اب -  $ع$  کا جزو الکعب امتحان سے معلوم ہوتا ہے پس یہ حاصل ہوگا

$$(ع + ق) = ع - (ق - ع)$$

اور ہم  $(ع - ق)$  کو سلسلہ اضافی میں قوا و متضادہ  $ع$  کی پہلا سکتی ہیں

اور یہ موافق سابق کی مجموعہ  $ع + ق$  اور  $ع - ق$  کا دریافت کر سکتی ہیں

یہ صورت کہ  $ع = ق$  کے دفعہ گذشتہ کی دوسرے مثال میں ملے گی

اس بات پر بھی غور کرنی چاہی کہ ضابطہ ڈی مولور کے وساطت سے مقدار  $ع + ق$  کا جزو الکعب

اسی صورت میں بیان ہو سکتا ہے کہ او میں علم منلتی جملے ملے ہوں

(۱۷۲) دفعات گذشتہ سے ظاہر ہوتا ہے کہ کعبی مساوات  $ع + ق + ع = ۰$  ہمیشہ کارڈس کے

عمل سے حل ہو سکتی ہے اور جب ق مساوات میں مثبت ہو تو کچھ وقت او میں نہیں واقع ہوتی اور جب

ق منفی ہو اور اس کی ساتھ ق تعداد پہنچا  $ع$  سے ہو تو ان صورتوں میں

قیمتیں خیالی ہوں گیں اگر ق ایک منفی مقدار ہو اور تعداد بڑی  $ع$  سے ہو تو کارڈس

کے اصل میں بڑی دقت ہوتی ہے اور اس صورت میں تمام قیمتیں اصل میں  
اگر ق ۳ منفی ہو اور تعداد برابر  $\frac{۲}{۳۴}$  ہو تو  $\frac{۲}{۳۴} + \frac{۲}{۳۴} = ۰$  تو بموجب دفعہ ۷ کے  
اوسکی قیمتیں برابر ہوں گیں بموجب دفعہ ۱۴ کے اس صورت میں  $م = ن = ۳ - \frac{۲}{۳۴}$

اور قیمتیں ۳ م اور ۳ م اور ۳ م ہیں

جس صورت میں کبھی مساوات کی قیمت ایک علیہ ہو جائے تو کبھی مساوات کا تنزل مساوات درجہ  
دوم کی طرف کر لیں اور اس مساوات درجہ دوم سی دو قیمتیں دریافت کر لیں اور وقتاً گزشتہ  
کی ترکیب سے قیمتوں کو نہ دریافت کریں

(۱۷۳) کامل کبھی مساوات کی حل کرتی ہیں جو نتیجہ حاصل ہونے میں اوسکا مختصر بنایا کرتی ہیں جس کو مساوات

$$۳ + ۱ + ۲ + ۱ + ۲ + ۱ + ۲ = ۰$$

میں فرض کرو کہ لا = ی -  $\frac{۱}{۳}$  تو یہ حاصل ہوگا کہ

$$۳ + ۱ + ۲ + ۱ + ۲ + ۱ + ۲ = ۰$$

$$۳ + ۱ + ۲ + ۱ + ۲ + ۱ + ۲ = ۰$$

اب بموجب ترکیب کاڑدن کے

$$لا = \left( -\frac{۲}{۳۴} + \frac{۲}{۳۴} \right) + \left( -\frac{۲}{۳۴} + \frac{۲}{۳۴} \right) - \left( -\frac{۲}{۳۴} + \frac{۲}{۳۴} \right)$$

اسے یہ دریافت ہوتا ہے کہ

$$\frac{۲}{۳۴} + \frac{۲}{۳۴} = \frac{۲}{۳۴} - \left( \frac{۲}{۳۴} - \frac{۲}{۳۴} \right) + \left( \frac{۲}{۳۴} - \frac{۲}{۳۴} \right)$$

(۱۷۴) بعض معادلات کبھی جن میں اشیاء کی خاص قیمتیں ہوں بغیر کاڑدن کی ترکیب سے بھی حل ہوتی ہیں

مثلاً فرض کرو کہ

$$۳ + ۱ + ۲ = ۳ - ۲ - ۱$$

اسکو اس طرح لکھ سکتی ہیں کہ

$$۳ + ۱ + ۲ = ۳ - ۲ - ۱$$





(۲) فرض کرو کہ ہر اور کمین میں سے ایک مثلاً ہر قیمت کبھی مساوات کی ہی ہو دفعہ ۱۶۹ کی موافق

عمل کرنی سے ثابت ہوتا ہے کہ کبھی مساوات کی ہی ایک اصلی قیمت چھوٹی نہ کی ہے

پس اس کی دو اصلی قیمتیں ہیں ناگزیر تیسری قیمت ہی اصلی ہوگی اور سب طرح اگر ایک قیمت

کبھی مساوات کی ہو تو ایک اصلی قیمت اس کی بڑی بہ نسبت ہر کی ہوگی اصلی ضرور ہی کہ تیسری قیمت

(۱۶۸) اب ہم اس شرط کی تحقیقات کرنی ہیں جس کی موافق ہر ایک قیمت مساوات کبھی ہو

فرض کرو کہ ہر ایک قیمت مساوات درجہ دوم اور درجہ سوم کی ہی ہے

چونکہ مساوات درجہ دوم کی ایک قیمت ہے اصلی

$$(1) \quad (r-s) - a = 0$$

اور چونکہ ہر مساوات کبھی کی ہی قیمت فرض کی گئی ہی اصلی یہ حاصل ہوگا کہ

$$b^2 (r-s) + s^2 (r-s) + 2ab (r-s) = 0 \quad (1)$$

(۱) اور (۲) سے یہ مستط ہوتا ہے کہ

$$b^2 (r-s) + s^2 (r-s) + 2ab (r-s) = 0$$

$$\text{یعنی } [b^2 (r-s) + s^2 (r-s) + 2ab (r-s)] = 0$$

$$\text{اسیو اصلی } b^2 (r-s) = s^2 (r-s) \quad (3)$$

(۲) اور (۳) سے ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$r-b = - \frac{a}{b} \text{ اور } r-s = - \frac{a}{b} \quad (4)$$

$$\text{اور اسیو } b = - \frac{a}{b} \text{ س } = - \frac{a}{b} \quad (5)$$

اسی ثابت ہوا کہ کبھی مساوات کی مثال میں ارتباط (۵) ہونا چاہی تاکہ

مساوات درجہ دوم کی قیمتوں میں سے ایک قیمت کبھی مساوات کی ایک قیمت ہو

بالعکس اس کی اگر (۵) مستحکم ہو تو (۴) سے تحقیق کر کر کہ اصلی ایک قیمت مقرر کریں تو

دونو مساوات (۱) اور (۲) کی شرائط پوری ہو جائیں گی پس مساوات درجہ دوم اور مساوات درجہ سوم

ایک قیمت مشترک ہو جائیگی

(۱۶۵) مساوات کبھی کی قیمتوں کی برابر ہونی کی شرائط ہم تحقیق کرتے ہیں  
اگر وہ اور کمین ہی کوئی ایک ہی قیمت کبھی مساوات کی نہ ہو تو دفعہ ۴۷ کی اثبات معلوم ہوتا ہے کہ  
مساوات کبھی کی قیمتیں غیر مساوی ہوں دفعہ ۴۸ کا عمل ان دو درجہ کی مساواتوں میں ہر ایک پر  
(لا-س) (لا-و) - پٹ = ما (لا-ا) (لا-ب) - سٹ = -

بجای مساوات درجہ دوم (لا-ب) (لا-س) = (ا-س) کے بدل سکتا ہے

اسی ثابت ہوتا ہی کہ کبھی مساوات کی برابر قیمتیں نہیں ہو سکتیں جب تک اوسکی اور ان مجہ دوم کی مساواتوں میں سی لکھ مساوات کی قیمت مشترک نہ ہو

اسی نیت ہوا کہ مساوات (۵) کی شرائط لا بدی مساوات کبھی کی برابر قیمتوں کے وسطی پہچان بن جائیں

$$1 - \frac{c}{a} = b - \frac{1}{c} = \frac{1}{c} - \frac{1}{a} = \frac{1}{c} - \frac{1}{a}$$

بالعکس اسکی اگر پیشتر استعمال ہوں تو اس بات کے معنی کی فہم نہیں برابر ہو سکتی۔ دلیل اسکی یہ ہے کہ ان برابر مفاد پر کو رسے تعبیر کرو

تو  $r = r + \frac{1}{2}$  اور  $b = r + \frac{1}{2}$  اور  $s = r + \frac{1}{2}$

اور ب اور س کی جگہ ان قیمتوں کو لمبی مساوات میں مندرج کرو تو

$$= \left( \frac{0}{0} + \frac{1}{0} + \frac{0}{1} \right) r(r-1) - r(r-1)$$

بس قیمت رکھ راتی ہے اور اور قیمت یہ ہے کہ

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a} +$$

تیسرے احوال کے معادلات درجہ چہارم

(۱۸۰) معاوضات درج چهارم کی حل کرنی کی بعض شرطیں ہم بیان کرتے ہیں

اوس دلیل کی موافق کہ دفعہ ۱۷۵ میں بیان ہوئی ہے مساوات درجہ چارم کو بغیر دوسرے نم کی فرض کرتی ہیں اول حل جبکہ ہم بیان کرتے ہیں دس کا نہیں حاصل کہلاتا ہے

(۱۸۱) مساوات  $لا + ق + لا + ر لا + ص = کو حل$  کرو۔

فرض کرو  $لا + ق + لا + ر لا + ص = (لا + ص لا + ف) (لا - ص لا + گ)$

اب ہم کو اس بات بتلانا چاہیے کہ مقدار ص دے دے کہ کو کس طرح دریافت کر سکتی ہیں

بالکل طرف جواز اضرب لکھی ہیں او کو با ہم ضرب دو اور دو نو ارکان کی امثال

لا کے یکساں قوتوں کے اسپین برابر لکھو تو پچھل ہو گا کہ

گ + ف - ص = ق اور ص (گ - ف) = ر اور گ ف = ص

یعنی گ + ف = ق + ص اور گ - ف = ر اور گ ف = ص

ان مساواتوں میں سے اول اور دوم مساوات سے گ اور ف کو ص کی ارقام میں دریافت کر کے

تیسرے مساوات میں مندرج کرو تو

$(ق + ص + ص) (ق + ص - ص) = ص$

تحویل اور اختصار کرنی ہے اس مساوات سے یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$ص + ۲ ق + ص = (ق - ص) (ق + ص) = ۲ - ص$

اس مساوات کو ص دے دریافت کرنی کی واسطی ہم مساوات کبھی سمجھ سکتے ہیں اور ہم کو یقینی ایک حقیقی

مثبت قیمت بموجب دفعہ ۲۰ کی حاصل ہوگی پس جب ص ہم کو معلوم ہوگا تو اسی ص معلوم ہوگا اور

پھر گ اور ف معلوم ہو جائینگے پس جملہ  $لا + ق + لا + ر لا + ص$  دو حقیقی اجزاء ضربی میں تحلیل ہو جائیگا اور

ہم کو مساوات درجہ چہارم کی چاروں قیمتیں ان درجہ دوم کی مساواتوں کی حل کرنی ہی حاصل ہو جائیگی۔

$لا + ص لا + گ = ۰$  اور  $لا - ص لا + گ = ۰$

(۱۸۲) یہ بات غور طلب ہے کہ ہم فی دوا جزاء ضربی جو درجہ دوم کے فرض کئی میں دین سے ایک

میں رقم ص لا فرض کی ہے اور دوسرے میں - ص لا اور دلیل اسکی یہ ہے کہ جس جملہ کی ہم

تحلیل اجزاء درجہ دوم میں کرنا چاہتی ہیں اس میں رقم لا کی ملتق نہیں ہے اب دوسری

مساوات درجہ دوم کی جواز ضربی دوا جزاء کی لکھی ہے او کی دو نو قیمتوں کا مجموعہ ص ہے اسکی مساوات



درجہ چہارم مفروضہ کی دو قیمتوں کا مجموعہ صفر ہی اور مساوات درجہ چہارم کی چار قیمتوں میں  
 سی دو دو کو  $\frac{2}{3} \times \frac{2}{1}$  طرح سی یعنی ۴ طرح سی منتخب کر سکتی ہیں اور اسی ذیل سی  
 مساوات صہ کی چہرہ درجہ کی حاصل ہوتی ہی لیکن اس سبب ہی کہ موافق دفعہ ۲۵ کے  
 مساوات درجہ چہارم کی چار دن قیمتوں کا مجموعہ صفر ہی اسلی مجموعہ دو قیمتوں کا متحد المقدار اور  
 مختلف العلامت باقی دو مقداروں کے مجموعہ کا ہوگا پس سی لیل اس بات کی معلوم ہوئی کہ مساوات صہ کی  
 صہ کی بھت قواد اسطرح ملتی ہوتی ہیں کہ صہ کی قیمتیں کبھی مساوات کی حل کرنی سی دریافت ہوجاتی ہیں  
 جب صہ سم کو دریافت ہو جائے تو ہم کو او کی جذر نکالنی سی جو دو قیمتیں مختلف علامت درجہ چہارم  
 او نہیں سی ہر ایک کو کام میں لا سکتی ہیں اسو اسطی کہ صہ کی مختلف علامتوں کی کام میں لانی سی  
 قیمتیں اور گہ کی فقط پسین بدل جائینگے اور اس تبدل سی اشراون نتائج پر کچھ نہیں ہوگا  
 مساوات درجہ چہارم کے حل کرنے میں کام آتے ہیں

(۱۸۳) مثلاً فرض کرو کہ لا - ۱۰ - لا - ۲۰ - لا - ۱۴ = ۰ یہاں ق = - ۱۰ اور ر = - ۲۰  
 اور ص = - ۱۴ مساوات کبھی صہ کی یہ حاصل ہوگی کہ صہ - ۲۰ - صہ + ۱۴ - صہ = ۰  
 اور ایک قیمت اسکی صہ = ۲ ہی دفعہ ۱۱۹ دیکھو پس صہ = ۲ تو ت = ۲ اور گ = - ۱۸ اسو  
 لا - ۱۰ - لا - ۲۰ - لا - ۱۴ = (لا + لا + ۲) (لا - لا - ۱۸)

پس مساوات مفروضہ درجہ چہارم کی یہ چار قیمتیں دریافت ہوئیں

۲ - ۱۰ - ۲۰ - ۱۴ اور ۱ - ۱۸

(۱۸۴) پس اوپر کی بنیاد سی ظاہر ہوتا ہی کہ مساوات درجہ چہارم کا حل موقوف ایک مساوات  
 کبھی کے استعانت پر موقوف ہی اسو اسطی اس امر کو دریافت کرنا ایک بڑی بات ٹھہری  
 کہ یہ کبھی مساوات کی صورت معدوم النحول رکھتی ہی دفعہ ۱۷۱ دیکھو  
 اس کے موقع اس مجموعی کی ثابت کرنی کا ہنہ لگتا ہی کہ اگر مساوات درجہ چہارم کی دو حقیقی  
 قیمتیں اور دو خیالی قیمتیں ہوں تو مساوات کبھی استعانت کی کبھی صورت معدوم النحول نہیں ہوا

دلیل فرض کرو کہ مساوات درجہ چہارم کی خیالی قیمتیں  $+۴$  صد  $-۱۳$  اور  $-۴$  صد  $-۱۳$  کے  
تعبیر ہوں تو اس سبب کہ چاروں قیمتوں کا مجموعہ صفر ہی ہو حقیقی قیمتیں  $-۴$  صد  $+۴$  صد اور  $-۴$  صد اور  
کی ہونگئیں ان قیمتوں سے ہر زوج کے مجموعہ سے پہلے حاصل ہونگے کہ  
 $+۲$  صد  $+۲$  صد  $+۲$  صد اور  $+۲$  صد  $+۲$  صد (۱۳- صد)

پس تین قیمتیں  $+۲$  صد کی پہلے ہونگئیں  $(+۲$  صد  $+۲$  صد  $+۲$  صد) اور  $(-۴$  صد  $-۴$  صد  $-۴$  صد)  
اگر لے کر صفر نہ ہو تو  $+۲$  صد کے ان قیمتوں میں سے دو خیالی ہونگئیں اور اگر لے کر صفر ہو تو  
 $+۲$  صد کی تمام قیمتیں حقیقی ہونگئیں لیکن باقی دو برابر ہیں اسلیئے کبھی مساوات  $+۲$  صد کی صورت  
معدوم الخویل نہیں ہوگی

(۱۸۵) اگر مساوات درجہ چہارم کی تمام حقیقی قیمتیں ہوں تو مساوات کبھی مستعان کی قیمتیں بھی نہ ہوں گی  
اور اگر مساوات درجہ چہارم کی تمام خیالی قیمتیں ہوں تو وہ ان

$-۴$  صد  $-۴$  صد اور  $-۴$  صد کی ہونگئیں ان قیمتوں میں سے ہر زوج کے  
مجموعہ سے پہلے حاصل ہونگی کہ  $+۲$  صد  $+۲$  صد  $+۲$  صد اور  $+۲$  صد  $+۲$  صد (۱۳- صد)

پس قیمتیں  $+۲$  صد کی  $+۲$  صد اور  $-۴$  صد اور  $-۴$  صد میں اسلیئے سبب حقیقی قیمتیں ہیں  
اسی معلوم ہوا کہ اگر مساوات درجہ چہارم کی تمام حقیقی قیمتیں ہوں یا خیالی قیمتیں ہوں تو کبھی مساوات  
مستعان اکثر معدوم الخویل ہوگی ہم فی جو یہہ لکھا ہی کہ مساوات اکثر معدوم الخویل ہوگی

تو ہر سبب یہ ہی کہ ممکن ہے کہ مساوات کبھی کی دو قیمتیں برابر ہوں تو پہلے وقت وہ معدوم الخویل ہوں گے  
(۱۸۶) ہم فی اوپر کی دو دفعوں میں پہلے بتلایا ہی کہ مساوات کبھی مستعان کی قیمتوں کے

موافق مساوات مفروضہ درجہ چہارم کی قیمتوں کے کیا ہونگئیں اب ہم اسکی بالکس لکھتی ہیں

کہ مساوات مفروضہ درجہ چہارم کی قیمتوں کی صورتیں موافق مساوات کبھی مستعان کی قیمتوں کے

کیا ہونگئیں جو کہ مساوات کبھی کی آخر رقم منفی ہی اسلیئے ایک قیمت مثبت ہوگی اور جو کہ پوزیٹو ہے  
حاصل ضرب قیمتوں کا مثبت ہی تو یہ صورتیں واقع ہونگئیں (۱) تمام قیمتیں مثبت ہوں (۲) ایک

ہو اور دوسری ہون (۳) ایک مثبت قیمت ہو اور دوسری قیمت ہو بموجب دفعات ۵۴ اور ۱۸۵ کے  
نیچے مفضلہ ذیل حاصل ہونگے

(۱) اگر مساوات کبھی کی تمام قیمتیں مثبت ہوں تو مساوات درجہ دوم کی تمام قیمتیں حقیقی ہونگیں  
(۲) اگر مساوات کبھی کی ایک مثبت قیمت ہو اور دوسری قیمت ہو بموجب دفعات درجہ چہارم کے دو قیمتیں حقیقی اور  
دو قیمتیں خیالی ہونگیں یا چاروں قیمتیں خیالی ہونگیں

(۳) اگر کبھی مساوات کی ایک مثبت قیمت ہو اور دوسری قیمت ہو بموجب دفعات درجہ چہارم کی دو قیمتیں  
اور دوسری قیمتیں ہونگیں

(۱۸۶) مساوات درجہ چہارم کی چاروں قیمتیں بہت سادگی کی مانند کبھی مساوات تین قیمتوں میں بیان  
فرض کرو کہ  $۲ق + ۲ص = ۲$  اور  $۲ق + ۲ص = ۲$  یعنی ہوں جو مساوات سی حاصل ہوتی ہیں کہ  
 $۲ق + ۲ص = ۲$  (ق - ۲) ص - ۲ = ۰

تو بموجب دفعہ ۴۵ کے یہ حاصل ہوتا ہے کہ  $۲ق + ۲ص = ۲$  اور  $۲ق + ۲ص = ۲$   
 $۲ق = ۲ - ۲ص$  اور  $۲ق + ۲ص = ۲$  رکھیں اور  $۲ق$  کی قیمت سے لین تو  
 $۲ق + ۲ص = ۲$  اور  $۲ق + ۲ص = ۲$  (ق + ۲ - ۲ص)

$$= ۲ق + ۲ص = ۲$$

اسی طرح مساوات  $۲ق + ۲ص = ۲$  کے حل کرنی ہی ہم کو یہ حاصل ہو گا کہ

$$۲ق = ۲ - ۲ص$$

اسی طرح مساوات  $۲ق + ۲ص = ۲$  کے حل کرنے سے ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$۲ق = ۲ - ۲ص$$

پس مساوات درجہ چہارم کی یہ چار قیمتیں حاصل ہونگیں کہ

$$۲ق = ۲ - ۲ص$$

(۱۸۸) ایک اور ترکیب مساوات درجہ چہارم کی حل کرنی کی مختلف ہندسوں کے بھی ہی انہیں کچھ ہوا ہی فرق ہے

باب سیزدہم  
اور اس ترکیب کا نام کہی تو فرض کی ترکیب کہی وازنگ کی ترکیب اور کہی سمبسن کی ترکیب جاتا ہے اب ہم اس کو بیان کرتے ہیں  
فرض کرو مساوات درجہ چہارم کی یہ ہو کہ

$$لا + ع + لا + ق + لا + لا + ص = ۰$$

طرفین پر لا + لا + ب + لا + س زیادہ کرو اور لا اور ب اور س کو ایسا معین کرو کہ ہر ایک ن مساوات کی مربع کامل بن جائی تو یہ حاصل ہوگا کہ

$$لا + ع + لا + (ق + لا) + لا + (ب + لا) + ص + س = لا + لا + ب + لا + س$$

بائیں طرف کا رکن مساوات مجذور کامل ہوگا اگر  $۴ = لا + س$  کے ہوا تب ن طرف کی رکن کو فرض کرو کہ وہ برابر

$$(لا + ع + لا + م)$$

کے ہو تو مثال کے مقابلہ کرنے سے یہ حاصل ہوگا کہ

$$۲ + م + ع = ق + لا اور ع + م + ر + ب اور م = ص + س$$

یہ تین ارتباط لا اور ب اور س کو ارقام م میں بیان کرتی ہیں لا اور ب اور س کی قیمتوں کو مساوات  $۴ = لا + س$  میں مندرج کرنے سے یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$(ع - م - ر) = ۲ = (۲ + م + ع - ق) (م - ص)$$

اس کبھی مساوات سی م دنیا بگو اور پہلا لا اور ب اور م معلوم ہو گئی اور چونکہ یہ ہم کو حاصل ہی کہ

$$(لا + ع + لا + م) = لا + لا + ب + لا + س = لا + لا + ب + لا + \frac{۲}{لا}$$

$$اسی ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے کہ لا + ع + لا + م = \frac{۲ + لا + لا}{لا}$$

پس ہم کو دو مساواتیں درجہ دوم کی حل کرنی پڑیں گے یعنی

$$لا + ع + لا + م + \frac{۲ + لا + لا}{لا} = ۰ اور لا + ع + لا + م - \frac{۲ + لا + لا}{لا} = ۰$$

(۱۸۹) یہاں یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ اس ترکیب میں جس کبھی مساوات مستعان کی حل کرنی

کام ہم کو سیر تا ہی دہ اگر نہ معدوم التحویل ہوگی بشرطیکہ مساوات درجہ چہارم کی دو حقیقی قیمتیں  
اور دو خیالی قیمتیں نہ ہوں دلیل فرض کرو کہ مساوات مفروضہ درجہ چہارم کی چار قیمتوں کو  
سہ حصہ دلرو فر تعبیر کرتی ہیں تو دفعہ ۱۸۸ میں دوسرا وائین درجہ دوم کی حاصل ہوئیں ہیں  
اول پر خیال کرنی سی یہ نتیجہ پیدا ہوتا ہے کہ  $m + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  برابر چاروں مقدار سہ حصہ دلرو فر  
میں سی دو کی حاصل ضرب کے ہوا اور  $m - \frac{1}{2}$  باقی دو کے حاصل ضرب کے ہو پس فرض کرو کہ  
 $m + \frac{1}{2} = \text{سہ حصہ اور } m - \frac{1}{2} = \text{لر فر}$

پس  $m = \frac{1}{4} = (\text{سہ حصہ} + \text{لر فر})$   
پس یہاں فریضہ سی یہ نتیجہ مستنبط کرتی ہیں کہ  $m$  کی دو اور قیمتیں  $\frac{1}{4}$  (سہ لر + سہ فر)  
اور  $\frac{1}{4}$  (سہ فر + سہ لر) ہونگی

یہ ظاہر ہے کہ اگر سہ حصہ دلرو فر تمام حقیقی قیمتیں ہوں تو  $m$  کی یہ قیمتیں حقیقی ہونگی اور  
اگر تمام سہ حصہ دلرو فر تمام خیالی ہوں تو یہی قیمتیں حقیقی ہونگی لیکن اگر چاروں قیمتوں  
میں سی دو خیالی اور دو حقیقی قیمتیں ہوں تو یہ نتیجہ نکلی گا کہ  $m$  کی دو قیمتیں خیالی ہیں اور ایک حقیقی  
یا دو کئی تمام حقیقی قیمتیں ہیں اور دو ادنیٰ سی برابر ہیں

(۱۴) اب ہم یو لری ترکیب مساوات درجہ چہارم کی حل کرنی کی گہتی ہیں فرض کرو کہ مساوات یہ ہے

$$x^4 + q x^2 + r x + s = 0$$

فرض کرو کہ  $x^2 = y + z$  اور  $y + z = \text{سہ حصہ پس}$

$$x^4 = (y + z)^2 = y^2 + z^2 + 2yz = (y^2 + z^2) + 2yz$$

$$\text{یعنی } x^4 = (y^2 + z^2) + 2yz = (y^2 + z^2) + 2yz$$

طرفین کا مجذور کرو تو

$$x^4 = (y^2 + z^2) + 2yz = (y^2 + z^2) + 2yz$$

$$= (y^2 + z^2) + 2yz = (y^2 + z^2) + 2yz$$



۱۱۷ = ۸۰ کا مجذور کیا گیا تھا اور وہ عمل میں اس صورت میں  $\frac{۱۱۷}{۸۰} = \frac{۱۱۷}{۸۰}$  میں کام آیا تھا پس اس سبب کہ ارتباط دوسرے صورت میں علامت رک کی تبدیلی نہیں بدلتی تو عمل میں فی الحقیقت قیمتیں مساوات درجہ چہارم  $۱۱۷ + ق - لا - رلا + ص = ۱۰$  اور نیز مساوات درجہ چہارم  $۱۱۷ + ق - لا + رلا + ص = ۰$  کی کام میں آتی ہیں اسلی جابر کی اٹھ قیمتیں ہو جائیں دفعہ ۸۱ کی مکعبی مساوات مستعان دفعہ ۱۹۰ کی مکعبی مساوات سے تطبیق ہو جائیگی اگر  $۱۱۷ = ۸۰$  ط کے فرض کریں پس دفعات ۱۸۷ - ۱۸۴ تک میں جو مساوات مکعبی مستعان اور مساوات مفروضہ درجہ چہارم کے قیمتوں کے ارتباط اور وہ صورتیں جو مساوات کو معدوم التحویل بناتی ہیں لکھی ہیں وہ جیسی کہ ڈس کا ٹریس کی ترکیب سے متعلق ہیں ایسی ہی جو مرکب کی ترکیب سے متعلق ہیں (۱۹۲) حل خاص صورت کی مساوات درجہ چہارم کا بہ نسبت عام صورت درجہ چہارم بہت سہاں ہوتا ہے مثلاً یہ مساوات درجہ چہارم

$$۱۱۷ + ع + لا + ق - لا + رلا + ص = ۰$$

مساوات درجہ دوم کی طرح حل ہو سکتی ہے اگر  $۱۱۷ + ع + ق - لا + رلا + ص = ۰$  کے اسواسطی کہ مساوات  $۱۱۷ + ع + لا + ق - لا + رلا + ص = ۰$  کو اس طرح لکھ سکتی ہیں کہ

$$لا (لا + ع) + (ق - لا) (لا + رلا + ص) = ۰$$

اور یہ مساوات درجہ دوم کی طرح حل ہو سکتی ہے اگر  $۱۱۷ + ع + ق - لا + رلا + ص = ۰$  کے ہوں یعنی اگر  $۱۱۷ + ع + ق - لا + رلا + ص = ۰$

### چودھواں باب سٹریم صبا کا ضابطہ

(۱۹۳) البواب گذشتہ میں ہم فی معادلات کی قیمتوں کی مسائل اور تیسری اور چوتھی درجہ کی مساواتوں کی حل کرنی کی ترکیبیں لکھیں ہیں مگر اب ہم ایک اور ہی مضمون لکھتے ہیں یعنی معادلات کی عددی تقریبی قیمتیں کن ترکیبوں اور حکمتوں سے دریافت ہوتی ہیں ان کا آغاز اس مضمون کا سٹریم صبا کی ضابطہ سے ہوتا ہے اول اس ضابطہ کو ثابت کرتے ہیں اس کا مطلب یہ ہے

اگر ایک مساوات کی قیمتوں کا مقام اور اتحاد حقیقی قیمتوں کی تخصیص ہو جائے  
 دفعہ اندہ میں ضابطہ کو ثابت کیا ہی اور یہ پڑا اور قیمتیں اس ضابطہ کی لکھی ہیں اور باجہاڑان کو موافق مثالوں کے  
 (۱۹۴) سٹریم حصہ کا ضابطہ فرض کرو کہ (۱۱) = مساوات ہو جس میں ہر دو قیمتیں خارج  
 ہو گئی ہیں اور (۱۱) کا اول حملہ مشتق (۱۱) ہو اور یہ (۱۱) اور (۱۱) (۱۱) سے عمل  
 و فی اعظم دریافت کرنی کا کیا گیا ہو مگر اس میں یہ ترمیم اور کی گئی ہو کہ جو باقی تقسیم کی اندر چلی ہو اس کی  
 علامتیں بدل کی گئیں ہوں اور یہ وہ باقی مقسوم علیہ بنائی گئی ہو اور یہ عمل جب تک جاری رہا ہو کہ ایک  
 باقی ایسی حاصل ہو کہ اس کو کچھ لگاؤ لاسی نہ ہو اور اس باقی کی بھی علامتیں بدل کی گئی ہوں  
 فرض کرو کہ اس طرح جو باقیات ترمیم شدہ حاصل ہوں وہ اس سلسلہ (۱۱) و (۱۱) (۱۱) = ۰۰۰ ج (۱۱)  
 سی تعبیر ہوں فرض کرو کہ یہ کوئی مقدار ہو اور صد ایک در مقدار ہو جو از روی جبر مقابلہ پڑی ہو  
 تو مساوات (۱۱) = کی حقیقی قیمتوں کی تعداد در میان یہ اور صد کی برابر اس زیادہ کی ہوگی  
 جو سلسلہ (۱۱) اور (۱۱) اور (۱۱) = ۰۰۰ ج (۱۱) کی غیرات عمل کی تعداد کو اس حالت میں کہ لا = صد کی ہو  
 اس تعداد تغیرات علامت پر اس سلسلہ کی حاصل ہی کہ جب لا = صد کے ہو  
 تمام سلسلہ (۱۱) و (۱۱) (۱۱) و (۱۱) (۱۱) = ۰۰۰ ج (۱۱) کو سٹریم کے حملے کہتے ہیں اور  
 سلسلہ (۱۱) و (۱۱) (۱۱) = ۰۰۰ ج (۱۱) کو مستعان حملہ کہتے ہیں مستعان حملہ وہی ہیں  
 جو سٹریم کے حملے ہیں مگر ادغین ہی (۱۱) خارج ہے  
 فرض کرو کہ ق ۱۰۰ قن - متواتر خارج قیمتوں کو جو عمل مذکور سی پیدا ہوتی ہیں  
 تعبیر کرنے میں تو یہ ارتباطات حاصل ہونگے

$$ج (۱۱) = ق ۱ ج (۱۱) - ج ۱ (۱۱)$$

$$ج (۱۱) = ق ۲ ج (۱۱) - ج ۲ (۱۱)$$

$$ج ۲ (۱۱) = ق ۳ ج ۲ (۱۱) - ج ۲ (۱۱)$$

$$ج ۳ (۱۱) = ق ۴ ج ۳ (۱۱) - ج ۳ (۱۱)$$



اب ان ارتباطات سی تین نتیجی استخراج کرتے ہیں  
**اول** اخر جملہ ح م (لا) صفر نہیں ہی اوسطی کہ بموجب فرض کے اوسکو کہہ تعلق لاسی نہیں ہے اگر وہ  
 صفر نو لوح (لا) اور ح (لا) کا جابہی کوئی وفق مشترک ہو اور بموجب دفعہ ۷ کے  
 مساوات ح (لا) = کی برابر تین ہوئی جابہی اور یہ خلاف فرض کے ہے  
**دوم** دو متصل کی جملی مستعان ایک ہی وقت میں معدوم نہیں ہو سکتی اسطرح کہ وہ معدوم ہو تو پہلے  
 اکی کی جملی پہی معدوم ہونے چھین ح م (لا) ہی دخل ہو اور یہ بموجب اول نتیجہ کی ناممکن ہے  
 سوم جب ایک جملہ معدوم ہوتا ہی تو اوسکی متصل کی طرفین جملوں کی علامتیں متضاد ہونی میں متضاد  
 فرض کروا ح م (لا) = تو نظم ارتباطات کی تیسری ارتباط سی ح م (لا) = ح م (لا) اصل ہوگا  
 اب کوئی سترم کی جملوں میں کسی جملہ کی اندر علامت تبدیل نہیں ہو سکتا الا اوس صورت میں کہ لاکی نوبت  
 اوس قیمت پر پہونچی کہ وہ اوس جملی کو معدوم کر دی اور اب ہم یہ ثابت کریں گے کہ جب لاکی نوبت  
 اوس قیمت پر پہونچتی ہی کہ وہ ح (لا) کو معدوم کر دی تو سترم کی جملوں میں ایک تغیر علامت ہو جاتا ہے  
 اور اس سبب ہی کہ لاکی نوبت اوس قیمت پر پہونچی کہ وہ کسی ایک جملہ مستعان کو معدوم کر دے تو  
 کوئی تغیر علامت نہ گم ہوتا ہے نہ پیدا ہوتا ہے  
**اول** فرض کرو کہ س ایک قیمت مساوات ح (لا) = کی ایسی ہو کہ ح (س) = -  
 فرض کرو کہ وہ ایک مثبت مقدار ہو بموجب دفعہ ۱۰ اکی ح (س) = ص (ص) تو اوس میں پہل سکتا ہے  
 اور بموجب دفعہ ۱۷ کی وہ ایسا چھوٹا مقرر ہو سکتا ہی کہ تمام سلسلہ کی وہی علامت ہو جو اول رقم کی علامت ہو  
 جو دوم نہیں ہوتی یعنی علامت ح (س) = ص (ص) کی وہی ہو جو علامت - ص (ح) (س) کی ہے  
 کیونکہ ح (س) = ۱۰ اور علامت ح (س) = ص (ص) کی وہی ہوگی جو علامت ح (س) کی ہے  
 بشرطیکہ وہ کو کافی چھوٹا فرض کریں پس اگر لا = س - ص کی ہو اور وہ کافی چھوٹا فرض کیا جا  
 تو ح (لا) اور ح (لا) کی مختلف علامتیں ہونگی  
 اسی طرح سی ثابت ہو سکتا ہی کہ اگر لا = س + ص کی ہو اور وہ کافی چھوٹا فرض کیا جاے

نوح (لا) اور ح (لا) کی ایک ہی علامت ہوگی  
 پس جب لا پڑھ کر مساوات ح (لا) = کی ایک قیمت پر اپنی نوبت پہنچائی تو سٹریم کی جملوں میں  
 ایک تغیر علامت کم ہو جائے  
 دوم فرض کرو کہ اس ایسی قیمت لا کی ہے کہ مستعان جملوں میں ایک کو معدوم کرنا ہی صلاح (لا) کو  
 نوح ح (اس) = نوح ح (اس) اور ح (اس) کی مختلف علامتیں ہوں گیں اور  
 ماقبل لا = س کی اور مابعد لا = س کی تین قیمتیں ح (لا) اور ح (لا) ح (لا) اور  
 ایک مستقل علامت ہمیشہ رکھیں گی اور ان میں ایک تغیر علامت ہوگا اسطرح کہ اگر ح (لا) اور  
 ح (لا) کی ایک ہی علامت ہو تو ح (لا) اور ح (لا) کی مختلف علامتیں ہوں گیں اور  
 بالعکس اسکی پس ثابت ہوا کہ اگر لا کی نوبت اس قیمت پر پہنچی کہ وہ کسی ایک جملہ مستعان کو معدوم کرے تو  
 اسی سٹریم کی جملوں میں نہ کوئی تغیر علامت کم ہوتا ہے نہ پیدا ہوتا ہے  
 کوئی قیمت لا کی دو متصل کی جملوں کو معدوم ایک ہی وقت میں نہیں کر سکتی اگر نوبت زیادہ  
 جملی جو متصل نہ ہوں معدوم ہو جائیں تو اگر ح (لا) ان میں سے ایک ہوگا تو موافق نتیجہ اول کے یہ ہے کہ  
 کہ ایک تغیر علامت کم ہوگا جب کہ لا کی زیادہ ہو کر اس قیمت پر نوبت پہنچے اور اگر ح (لا)  
 ان میں سے نہ ہو تو بموجب نتیجہ دوم کی یہہ اخذ ہوگا کہ کوئی تغیر علامت کم نہیں ہوئی  
 پس ہم فی ثابِت کر دیا کہ جب لازماً زیادہ ہوتا ہے تو سٹریم کی جملوں میں کبھی ایک تغیر علامت کم نہیں ہوتا  
 اور صورت میں کہ لا کی نوبت مساوات ح (لا) = کی قیمت پر پہنچی اور کبھی تغیر علامت پیدا نہیں ہوتا  
 پس یہ معلوم ہوا کہ تعداد تغیرات علامت کی جو اسطرح کم ہوتی ہے کہ لازماً زیادہ ایک قیمت سٹریم  
 ہو کر بڑی قیمت صد برابر اپنی نوبت پہنچائی وہ برابر ہوتی ہے مساوات ح (لا) = کی اور قیمتوں کے  
 تعداد کے جو درمیان صد اور صد کے واقع ہوں  
 (۱۹۵) ہم فی ثابِت کر دیا ہے کہ سٹریم کی جملوں میں تغیرات علامت کی اندر کوئی تبدل  
 اسباب ہی نہیں واقع ہو سکتا کہ لا کی نوبت اس قیمت پر پہنچی کہ وہ کسی ایک جملہ مستعان کو

باجہ دوم

۱۲۱

سٹریم صبا کا ضابطہ

معدوم کردی مگر اکثر علامات + اور - کی ترتیب میں جملوں کے سلسلہ کی اندر تبدل واقع ہوتی ہیں مثلاً فرض کرو کہ ۱ اور ۲ قیمتیں ۱۰۰ (۱۱) = کی ہو اور ۱۰۰ نسبت ب کی کم کی تو

ح (۱۱) اور ح ۱۱ کی مختلف علامتیں با قبل ۱۱ = ۱ کی ہوں گیں اور ایک ہی علامتیں با بعد

۱۱ = ۱ کے ہوں گیں با قبل ۱۱ = ب کی علامتیں ح (۱۱) اور ح (۱۱) کے پہر مختلف

ہوں گیں فی الحقیقت مساوات ح (۱۱) = کی ایک قیمت درمیان ۱۱ = ۱ اور ۱۱ = ب

کے ہوتی ہی پس ح (۱۱) کی نوبت مثبت سی منفی پر پہنچنی چاہی یا بالعکس کے درمیان ۱۱ = ۱ اور

۱۱ = ب کی پس ح (۱۱) کا مثبت سی منفی کی طرف جاتا یا بالعکس اسکی درمیان ۱۱ = ۱

اور ۱۱ = ب کی ہونا کل تعداد تغیرات علامت سٹریم کی جملوں کی سلسلہ کی کل تعداد

تغیرات علامت میں کچھ تبدل نہیں کر سکتا یہہہ ہم ثابت کر دیا مگر سلسلہ میں جو تقسیم علامت

+ اور - کی ہی اوہیں وہ تبدل پیدا کرتا ہی اور اسی بہہ بات ممکن ہی کہ جب لازماً زیادہ

ہو کہ ۱ اور ۱۱ نوبت پہنچانی ہی ایک تغیر علامت کو کم کری تو اسکی بعد ایک اور تغیر علامت کم ہو گا

جب لا کی نوبت زیادہ ہو کہ ب پر پہنچنی

اس دفعہ کو کچھ سٹریم صبا کی ثبات ضابطہ میں کوئی امر زیادہ نہیں ہوتا فقط اسی طالع علموں کے اعداد اس باب

میں ہوتی ہی گیس طرح تغیرات علامت کم ہوتے ہیں

(۱۵۶) سٹریم کی جملوں کی سلسلہ میں تغیرات علامت کی تعداد گنی میں یہہ ہو سکتا ہی کہ قیمت لا کی

جسپر ہم بحث کر رہی ستان جملوں میں سی کسی کو فنا کردی تو اس بات کا محاذ کرنا چاہی کہ ہم کوئی

تائیں یا مثبت کی یا منفی کی جملہ معدوم سی منسوب کریں کیونکہ علامتیں اسکی قبل اور بعد جملوں کے ضرور

مخالف ہوتے ہیں

(۱۵۷) مساوات ح (۱۱) = کی تمام حقیقی قیمتوں کی تعداد دریافت کرنی کی لئی لا کی جگہ ص

اور یہہ + ص سٹریم کی جملوں میں رکھو پس اول صورت میں جتنی تعداد تغیرات علامت کی ہوگی

اوسکو جسقدر از زیادہ دوسری صورت کی تغیرات علامت کی تعداد پر حال ہوگا اوسقدر تعداد

مساوات کی کل حقیقی قیمتوں کی ہوگی جب لا برابر + ص ۱ - ص ۱ کی کیا جائے تو جملوں میں ہی  
ہر ایک تبدیلی ہی علامت ہوگی جو لا کی اعلیٰ قوت کی علامت اوس جملہ میں ہو

(۱۹۸) فرض کرو کہ ح (لا) کی درجہ کون تعبیر کری تو تعداد مستعان جملوں ح (لا) و ح (لا) --  
اکثر ہوگی کیونکہ ہر باقی اکثر ایک درجہ کم بہ نسبت باقی ماقبل کی ہوگی پس یہ ہم فرض کریں گے  
کہ جو ح (لا) کا درجہ ہی دسی تعداد مستعان جملوں کی ہی اور ح (لا) میں جو اعلیٰ قوت لا کی ہے  
اوسکی مثال مثبت میں **اول** اگر کل مستعان جملوں کی اول رقموں کی مثبت مثال ہوں تو مساوات ح (لا) --  
کی تمام قیمتیں حقیقی ہوں گیں اس واسطے کہ سٹریم کی جمعی مثبت ہوگی جب لا = + ص کے ہو  
اور وہ علی التبادل مثبت اور منفی ہوں گیں جب لا = - ص پس ان تغیرات علامت  
گم ہو جائیں گے جب لا کی قیمت - ص سی + ص تک پہنچی

**دوم** اگر اول رقموں کی سب جملوں میں مثال مثبت نہ ہوں تو خیالی قیمتوں کے زوج اونسی ہی ہوں گے  
جتنی کہ تغیرات علامت واقع ہوں گے ہر تغیر کی واسطی ایک زوج ہوگا  
فرض کرو کہ ان مثال کی سلسلہ میں م تغیرات علامت اور ن م تو اثرات علامت ہیں  
پس جب لا = + ص تو م تغیرات علامت اور ن م تو اثرات علامت سٹریم کی جملوں میں ہیں  
اسے لا کو + ص سی - ص میں بدل دو تو تغیرات علامت کی جگہ تو اثرات علامت ہو جائیں گی اور  
تو اثرات علامت کی جگہ تغیرات علامت ہو جائیں گی پس جب لا = - ص تو ن - م تغیرات علامت ہوں گے  
اسی واسطے تغیرات علامت کی تعداد جب لا = - ص کی اور ن تغیرات علامت کی تعداد کو لا = + ص کے  
بقدر ن - م کے زیادہ ہوگی اور ن - م حقیقی قیمتیں مساوات ح (لا) -- کی ہوں گیں

اور اسی واسطے م خیالی قیمتوں کی تعداد ہوگی

اسی معلوم ہوا کہ ایک مساوات کی تمام قیمتوں کی حقیقی ہونی کی لہی یہ ضروری ہے کہ کل مستعان  
جملوں کی اول رقموں کی مثال ایک ہی علامت رکھیں  
(۱۹۹) فرض کرو کہ مستعان جملوں کی اندر ہم کو یہ دریا ہوتا ہے کہ ح (لا) کی مثبت قیمتیں ہوں گی





پس یہ کہ ضرور نہیں کہ سٹریم کی ترکیب پہلے ہم مساوی قیمتوں کی تحقیقات مساوات میں کریں بلکہ حسب سٹریم کی جملوں کا حساب لگائے تو ہم کو خود بخود مساوات کی برابر قیمتوں پر اگر وہ ہوں گے اطلاع اس سبب ہو جائیگی کہ اونکی موجود ہونی کی صورت میں باقی اخضر ہوگی

(۲۰۲) جس عمل سے کہ مستعان جملی حاصل ہوتی ہیں اوسکی اندر بعد اول جملی کی حاصل ہونے کے عمل عمل وفق اعظم کی ہم مقسوم اور مقسوم علیہ کو اکثر کسی مثبت عدد میں ضرب دیجائی ہیں یا کسی مثبت عدد پر تقسیم کر جاتی ہیں اور اسی کچھ فرق عمل میں نہیں آتا اسلیٰ کہ مستعان جملی مثبت عدد کی ضرب تقسیم علامتوں میں اپنی تبدیل نہیں ہوتے

سٹریم حسب کے ضابطہ سے ہم مساوات مفروضہ کی تحقیقی قیمتوں کی تعداد دریافت کر سکتے ہیں سٹریم کی جملوں کی سلسلہ میں لاکھ متواتر اعداد صحاح مندرج کریں تو اوسے ہم دریافت ہو گا کہ کونسی متصل کی اعداد صحاح کی درمیان قیمتیں واقع ہیں اور اگر ہم دریافت ہو کہ دو اعداد معینہ کی درمیان ایک قیمت یا زیادہ قیمتیں واقع ہیں تو بہر اون اعداد صحاح کی باہر جو اعداد کسور واقع ہوں اونکو بجای لاکھ مندرج کرنی چائی ہیں جب تک کہ آخر کو ہمیں یہ معلوم ہوتا ہے کہ ایک قیمت کل دو عددوں کے درمیان واقع ہے

(۲۰۳) اب ہم بعض مثالیں حل کرتے ہیں

فرض کرو کہ ح (۱) = ۵ - ۵۳ - ۵۲ - ۵۱ + ۱۳

یہاں ح (۱) = ۵۳ - ۵۴ - ۵۵

ح (۱) = ۵۲ - ۵۵

ح (۱) = ۱ +

بموجب دفعہ ۱۵۸ کے مساوات کی تمام قیمتیں مثبت ہیں اس سلسلہ علامتوں کا لاکھ قیمتوں کے اوقاف ہوگا

ح (۱)

ح (۱)

ح (۱)

ح (۱)

+

+

+

+

+

یہاں جب کہ لا = ۲ کی ہوتو دو تغیر علامت ہیں اور جب لا = ۳ کی ہوتو کوئی تغیر علامت نہیں ہوتا  
اسی معلوم ہوا کہ دو مثبت قیمتیں ۱۲ اور ۳ کی درمیان واقع ہیں اور کوئی اوسط قیمت نہیں ہے  
اور یہ پہلی دریا ہوتا ہی کہ جب لا = ۳ لوتو علامات متواترہ بہ ہوتے ہیں - + - + - اور جب لا = ۲

تو وہ + + - + اس ایک تغیر علامت - ۳ سی - ۲ پر نوبت پہونچتی ہی کم ہوتا ہے  
اوسط منفی قیمت - ۱۲ اور - ۳ کی درمیان واقع ہی اب دو مثبت قیمتوں کی جدا جدا کرنے کے  
لمی ہم کو ۱۲ اور ۳ کے بائیں اعداد کو لا کی جگہ رکھنا چاہی مثلاً فرض کرو کہ ہم لا = ۲ ۱/۲ رکھیں  
تو علامات متواترہ بہ ہوتی ہیں - - + پس ایک تغیر علامت واقع ہوتا ہے  
خواہ - کو + یا - خیال کریں پس ۲ سی ۲ ۱/۲ پر نوبت پہونچاتی سی ایک تغیر علامت کم ہوتا ہے  
اوسط ایک قیمت ۱۲ اور ۲ ۱/۲ کے درمیان واقع ہے

اور اسی معلوم ہوا کہ دوسری قیمت ۲ ۱/۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہوگی  
اب پہ فرض کرو کہ (لا) = لا - ۴ + لا ۵ + لا ۶ - لا ۷ = -

یہاں ج ۱ (لا) = لا - ۴ + لا ۵ + لا ۶ - لا ۷ خیر ضروری ۲ کو ساقط کر دیا ہی

$$ج ۲ (لا) = لا - ۴ + لا ۵ - لا ۶$$

$$ج ۳ (لا) = لا - ۴ + لا ۵ - لا ۶ + لا ۷$$

$$ج ۴ (لا) = لا - ۴ + لا ۵ - لا ۶ + لا ۷ - لا ۸$$

اس مثال میں ج ۴ (لا) کا حساب لگانا بچیدگی سی خالی نہیں مگر ہمارے مطلب پر اگر کوئی نقطہ ہنسیات جانسی کافی ہے  
کہ علامت کیا ہی پس ہم کو یہ تحقیق ہو گیا کہ وہ مثبت ہی تو ہم اس کا حساب ٹھیک ٹھیک نہیں کرتے اور صرف

$$ج ۵ (لا) = لا - ۴ + لا ۵ - لا ۶ + لا ۷ - لا ۸ + لا ۹$$

بموجب دفعہ ۱۹ کے مساوات کی تمام قیمتیں حقیقی ہیں

لا کی قیمتوں کے موافق سلسلہ علامات یہ ہے



| ج (لا) | ج (لا) | ج (لا) | ج (لا) | ج (لا) |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| +      | -      | +      | -      | +      |
| +      | -      | +      | -      | -      |
| +      | -      | -      | +      | -      |
| +      | -      | -      | +      | +      |
| +      | -      | -      | -      | +      |
| +      | -      | -      | -      | +      |
| +      | +      | +      | +      | +      |

۲- اور ۱ کے درمیان ایک اور ۱۰ اور ایک درمیان ایک تغیر علامت گم ہوتی ہے اور ۱۳ اور ۱۴ کی درمیان دو تغیرات علامت گم ہوتے ہیں

اگر ہم ۳ بجای لا کی کہیں تو علامات متواترہ - + + + حاصل ہوتی ہیں ان میں ایک تغیر علامت ہے پس ایک قیمت مساوات کی ۱۳ اور ۳ کی درمیان واقع ہوتی ہیں اس لیے دو سے قیمت ۳ ۱۳ اور ۱۴ کو دیا واقع ہوتی ہے  
 انہیں عرض کر دو کہ ج (لا) = ۲ لا - ۳ لا + ۱۰ لا - ۱۴ = ۰

یہاں ج (لا) = ۲ لا - ۳ لا + ۵ جز ضربی ۲ کو ساقط کر دیا ہے

$$ج (لا) = ۲ لا - ۳ لا + ۱۵ + ۹۸$$

اسی بات بادی النظر میں معلوم ہوتی ہے کہ مساوات ج (لا) = کی خیالی قیمتیں ہیں ج (لا) کہیں کسی لا کی حقیقی قیمت سے محروم نہیں ہوسکتا اس واسطے کہ جو دفعہ ۹۸ کی مثال میں سٹرجم صاحب کی تالیف قیمتوں کی دریافت کرنی کی ضرورت نہیں ہے جب لا = صہ تو علامات متواترہ - + - + اور جب لا = صہ تو علامات متواترہ + + + پس مساوات کی حقیقی قیمتیں اور دو خیالی قیمتیں ہیں اور حقیقی قیمتوں میں سے ایک مثبت اور دوسرے منفی مجموعہ دفعہ ۲۱ کے ہے

### پندرہواں باب فوزیر کا ضابطہ

(۲۰۸) جس سال کی حل کرنی میں دوسو برس یا اکثر بڑی بڑی مہندسین توجہ کر رہے تھے سٹرجم صاحب کی ضابطہ سے تمام اور کمال حل ہو گیا یہ ضابطہ پیرس میں ۱۸۳۵ء میں ایک کتاب میں منطبع ہوا سٹرجم صاحب سے پہلے جن مہندسین نے اس سوال کی حل کرنی میں توجہ اور کوشش کی ان میں سے لودن صاحب اور فوزیر صاحب کا حال قابل لکھنی کے ہے

ان دونو مہندسین کی ترکیبین ایک مسئلہ سی لکھتی ہیں اور اس مسئلہ کا موجود اعلیٰ انگلستان کے نزدیک تو فوریر حصہ ہیں اور اہل فرانس کے نزدیک بوڈن اور فوریر دونو کو اس مسئلہ کا توار ہو مسائل معادلات کا باب میں کتاب فوریر کی مسئلہ میں منطیع ہوئی اور بوڈن کی کتاب اسی باب میں مسئلہ میں منطیع ہوئی مگر اس کی شہادت موجود ہے کہ فوریر نے اپنی اس مسئلہ کو طالب علموں کے روبرو لکچر میں بوڈن کی کتاب کے مطابق پہلی بیان کیا تھا اب ہم اس مسئلہ کو ثابت کرتے ہیں

(۲۰۵) فوریر حصہ کا ضابطہ فرض کرو کہ ج (لا) جملہ جبرین درجہ کا ہو اور

ج (لا) اور ج (لا) ج (لا) ج (لا) جملہ شتقہ جملہ ج (لا) کی ہوں اور سہ کوئی ہی مقدار ہو اور سہ دوسری مقدار اوسے بڑی جبر مقابلہ کی اعتباری ہو تو مساوات ج (لا) = کی اصلی قیمتیں سہ اور سہ کی درمیان بڑی اوس از دیا دی نہیں ہو سکتیں جو تعداد تغیرات علامت سلسلہ ج (لا) و ج (لا) و ج (لا) ج (لا) کو جب لا = سہ کے ہو اوس تعداد تغیرات علامت پر اس سلسلہ کے حاصل ہی کہ جب لا = سہ کے ہو ہم اس تمام سلسلہ ج (لا) و ج (لا) و ج (لا) ج (لا) کو فوریر کے جملہ کہیں گے فوریر کے جملوں میں ہی کسی جملہ کی اندر تبدل علامت جب تک نہیں واقع ہو گا کہ لا کی نوبت اوس وقت پر

پہونچی کہ وہ جملہ کو معدوم کر دی اب چار صورتیں بحث طلب ہیں

اول فرض کرو کہ لا = س کی ج (لا) کو معدوم کرنا ہی اور ج (لا) معدوم نہیں ہوتا اب لا کی جگہ س - سہ رکھو اور سہ ایک مثبت مقدار ہی تو سہ کو اب چھوٹا فرض کر سکتی ہیں کہ

علاج (س - سہ) کی وہی ہو جو - سہ ج (س) کی ہی اور بموجب دفعہ ۱۷ -

علامت ج (س - سہ) کی وہی ہی جو ج (س) کی ہی پس اگر لا = س - سہ اور سہ کافی چھوٹا فرض کیا جا تو ج (لا) اور ج (لا) کی مختلف علامتیں ہو سکتیں

اسی طرح یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ اگر لا = س + سہ اور سہ چھوٹا کافی مقرر کیا جا تو ج (لا) اور ج (لا) کی ایک ہی علامت ہوگی

پس جب لا بڑھ کر مساوات ح (لا) = کی قیمت غیر مکرہ س پر نوبت پہنچنا ہی

تو فوریر کے جملوں میں سی ایک تغیر علامت کم ہو جاتا ہے

دوم فرض کرو کہ جب لا = س توج (لا) معدوم ہوتا ہی اور اس کی ساتھ ہی جملی شتقہ

ر (لا) دج م (لا) ۰۰ ح ر۔ (لا) تک معدوم ہو جاتی ہیں اور ح ر (لا) معدوم نہیں ہوتا

س۔ صہ بجائی لا کی رکھو اور صہ مثبت مقدار ہی تو صہ کو ای چھوٹا فرض کر سکتی ہیں کہ ان رقموں کے سلسلہ کے

ح (س) صہ دج (س) صہ دج م (س) صہ ۰۰ ح ر۔ (س) صہ دج ر (س) صہ

علامتیں جدا گانہ وہی ہوں جو ان رقموں کے سلسلہ کی ہیں کہ

(س) صہ دج ر (س) د (س) صہ دج ر (س) د (س) صہ دج ر (س) صہ ۰۰ صہ دج ر (س) صہ

دفعات ۱۰ اور ۱۲ دیکھو پس اگر لا = س۔ صہ اور صہ چھوٹا کافی مقرر کیا جاسی تو

فوریر کے اول ر + اجموں میں تغیرات علامت پیدا ہوتے ہیں

اسی طرح یہ ثابت ہو سکتا ہی کہ اگر لا = س + صہ اور صہ کافی چھوٹا مقرر کیا جا تو فوریر کے

اول ر + اجموں میں کوئی تغیر علامت نہیں پیدا ہوتا

پس جب لا بڑھ کر اپنی نوبت س پہنچنا ہی جو مساوات ح (لا) = کی ایک ایسی قیمت ہی رد فکرائی

تو فوریر کے جملوں میں سی تغیرات علامت کم ہوتے ہیں

سوم فرض کرو کہ جب لا = س تو شتقہ جملوں میں سی ایک جملہ معدوم ہوتا ہے

مگر اس کے طرفین متصلہ کی جملی معدوم نہیں ہوتی مثلاً فرض کرو کہ

جب لا = س کے توج ر (لا) معدوم ہوتا ہی مگر ح ر۔ (لا) اور ح ر + (لا) میں سے

کوئی معدوم نہیں ہوتا پس اگر صہ چھوٹا کافی فرض کیا جا تو جب لا = س۔ صہ تو علامتیں

ح ر۔ (لا) اور ح ر (لا) اور ح ر + (لا) کی جدا گانہ وہی ہونگیں جو

ح ر۔ (س) اور ح ر (س) اور ح ر + (س) کی ہیں اور جب لا = س + صہ تو علامتیں

وہی ہونگیں جو ح ر۔ (س) صہ ح ر + (س) اور ح ر + (س) کی ہیں

پس اگر ج-۱ (س) اور ج-۱+ (س) کی ایک ہی علامت ہو تو فوریر کے جملوں میں دو تغیرات علامت کم ہونگی اور جب لا کی نوبت برہ کر س پر پہنچے اور اگر ج-۱+ (س) اور ج-۱+ (س) کی مختلف علامتیں ہوں تو فوریر کے جملوں میں نہ تو تغیر علامت کم ہونا ہی نہ پیدا ہوتا ہے

چہاں فرض کرو کہ جب لا = س تو کوئی ایک متواتر جملی معدوم ہو جاتی ہیں مثلاً جب لا = س تو فرض کرو کہ جملی ج-۱ (لا) و ج-۱+ (لا) و ج-۱+ (لا) معدوم ہوتے ہیں اور اور ج-۱+ (لا) اور ج-۱+ (لا) معدوم نہیں ہوتے تو موافق سابق کے عمل کرو اور صہ کو مثبت اور چوٹا کافی مقرر کرو تو نتیجہ مفصلہ ذیل بلحاظ م+۱۲ ارقام ج-۱ (لا) و ج-۱ (لا) ج-۱+ (لا) و ج-۱+ (لا) کے حاصل ہونگے

(۱) فرض کرو کہ صہ ہی اگر ج-۱ (س) اور ج-۱+ (س) کی ایک ہی علامت ہو تو ارقام میں جب لا = س - صہ کے ہوم تغیرات علامت واقع ہونگی اور جب لا = س + صہ کی ہو تو کوئی تغیر علامت نہیں واقع ہوگا اگر ج-۱ (س) اور ج-۱+ (س) کی مختلف علامتیں ہوں تو ارقام میں جب لا = س - صہ کی ہوم + تغیرات علامت واقع ہونگی اور جب لا = س + صہ کے ہو تو ایک تغیر علامت واقع ہوگا پس بر کی جملوں میں دو صورتوں کی اندر جب لا کی نوبت پہنچی م تغیرات علامت کم ہونگے

(۲) فرض کرو کہ م طاق ہی اگر ج-۱ (س) اور ج-۱+ (س) کی ایک ہی علامت ہو تو ارقام میں جب لا = س - صہ کی ہوم + تغیرات علامت واقع ہونگی اور جب

لا = س + صہ کے ہو تو کوئی تغیر علامت نہیں واقع ہوگا پس فوریر کی جملوں میں جب لا کی برہ کر نوبت س پر پہنچی ہی تو م + تغیرات علامت کم ہوتی ہیں اگر ج-۱ (س) اور ج-۱+ (س) کی علامتیں مختلف ہوں تو ارقام میں جب لا = س - صہ کی ہوم تغیرات علامت اور جب لا = س + صہ کے ہو تو ایک تغیر علامت واقع ہوتا ہی پس جب لا کی برہ کر نوبت س پر پہنچی ہی تو فوریر کے

جملہ م - تغیرات علامت کو کم کرتے ہیں  
 المحضر ہے کہ فوریہ کے کبھی تغیر علامت حاصل نہیں کرتی بلکہ جب لاکمی سرہ کو نو بت س پر  
 کہ ایک قیمت مساوات ح (لا) = کی ہی پہونچی ہی تو ایک تغیر علامت کم ہو جاتا ہے  
 پس ضابطہ ثابت ہوا

(۲۰۶) دفعہ ۵-۲۰ میں جو دعوی ہم فی اسانی کی واسطی بیان کیا تھا وہ ثابت ہوا اور اسے  
 علاوہ اور باتیں بھی ثابت ہیں ہم فی او کو اس سبب سی دفعہ ۲۰۵ میں نہیں بیان کیا تھا کہ دفت  
 نہ واقع ہو یہ ظاہر ہے کہ جب فوریہ کے جملوں کی تغیرات علامت کی تعداد میں تبدیل واقع ہوتا ہے  
 باستثنا اس وجہ کی جواز یاد غیر مقررہ ہی مساوات معلوم کی قیمت پر نو بت پہونچتی ہی قیمت تعداد  
 تغیرات علامت کی کم ہونی ہی حاصل اگر متواترہ اور اسی بڑا عدد صہ فوریہ کی جملوں میں مندرج  
 کریں تو یہ نتیجہ حاصل ہو گا کہ

(۱) فرض کرو کہ فوریہ کی جملوں میں کوئی تغیر علامت کم نہیں ہوتا تو کوئی قیمت مساوات کی مساو صہ  
 کے درمیان نہیں واقع ہوگی

(۲) فرض کرو کہ فوریہ کی جملوں میں طاق تعداد تغیرات علامت کی کم ہوتی ہی تو اسی قیمت معلوم ہوتا  
 کہ قیمتیں مساوات کی جسکی تعداد طاق ہو مساو صہ کی درمیان واقع ہیں لیکن ہم یہ نہیں کہہ سکتے وہ  
 کوئی طاق تعداد ہی الا اس صورت میں کہ ایک تغیر علامت کم ہوا ہو تو ہم کو یقینی معلوم ہوتا ہی کہ ایک قیمت

(۳) فرض کرو کہ فوریہ کی جملوں میں جفت تعداد تغیرات علامت کی کم ہوتی ہی تو اسی ہم یہ نتیجہ  
 نکالیں کہ کیا تو کوئی قیمت مساو صہ کی درمیان نہیں واقع ہی اور اگر واقع ہیں تو جفت تعداد کوئی  
 (۲۰۷) فوریہ کے ضابطہ میں یہ ایک فائدہ ہی کہ اسکا استعمال سانی ہی ہو سکتا ہی کیونکہ جملہ

معلوم کی جملی مشتقہ سانی ہی دریافت ہو جاتی ہیں مگر یہ نقصان ہی ہی کہ اوس میں امتحان لائق  
 کرنی پڑتی ہیں اگر قیمتیں بہت فرقیہ میں ہوں تو او کی بکوں کے جسکی اندر وہ واقع ہوتی ہیں  
 بہت سی چوٹی چوٹی صی کرنی پڑتی ہیں تاکہ او کی قیمتیں خیالی قیمتوں ہو جاوے اور اسکی ضرورت پڑتی

فوریر کے ضابطہ کی موافق عمل کرنی سی پہلی اس بات کا امتحان کریں کہ مساوات برابر قیمتیں رکھتی  
ہی یا نہیں اگر ایسا نہ کرینگے تو کم قیمتوں کی قیمت تعداد ہم کو معلوم نہیں ہوگی

(۲۰۸) بوٹوں اور فوریر دونوں ترکیبیں بون مشبہ کی امتحان کرنی کی لکھی ہیں تاکہ بہ بات ظاہر ہو جائے کہ

قیمتیں مساوات مفروضہ کی اوس بون کی اندر واقع ہیں یا نہیں لیکن ان ترکیبوں کا بیان کرنا مفید ہے

اسلٹی کہ سٹریم کی ضابطہ سی مطلب یقینی حاصل ہو جائے اور اوسین کچھ وقت بھی نہیں بڑھتی ہے

(۲۰۹) یہی ثابت ہو سکتا ہے کہ فوریر کی ضابطہ کی اندر دس کارٹس کے علامتوں کی قاعدہ داخل ہے

فرض کرو کہ ح (لا) = مساوات کامل ہے

اگر لا = فوریر کے جملوں میں کہیں تو علامتیں وہی ہونگیں جو جملہ ح (لا) میں بائیں

طرف سے دائیں طرف ہیں اور اگر ہم لا = ص کے فوریر کے جملوں میں رکھیں تو

علامتیں سب مثبت ہونگیں اسی معلوم ہوا کہ فوریر کی ضابطہ کے موافق مساوات ح (لا) =

کی مثبت قیمتیں زیادہ تعداد میں ح (لا) کی تغیرات علامت کی تعداد سی نہیں رکھ سکتی

اگر مساوات مفروضہ کامل نہ ہو تو ارقام معدومہ کو لکھ کر او کی مثال صفر بنا کر لکھ دو اور ان

مثال پر علامتیں اسی لگ سکتی ہیں کہ فوریر کی جملوں میں تغیرات علامت کی اوس حالت میں

کہ ان ارقام کا بھی شمار ہوا دہنی ہی تعداد ہو جتنی کہ بغیر قیمتوں کی تعداد تغیرات علامت تھی

قاعدہ علامات کا وہ جز جو منفی قیمتوں سے متعلق ہے وہ اوس جز سے کہ مثبت قیمتوں سے متعلق ہے

مستبعد ہو سکتا ہے دفعہ ۴۳ دیکھو

(۲۱۰) مساوات کی مثبت قیمتوں کی اعلیٰ حد غائی دریافت کرنی کی ترکیب نیوٹن حساب کے

ہی وہ بھی فوریر کی ضابطہ میں داخل ہی دفعہ ۴۵ دیکھو اور اگر ح (لا) = مساوات ہو

تو نیوٹن کی ترکیب کے موافق ہم کو صہ کی قیمت ایسی دینا کرنی چاہی کہ جب لا = صہ تو فوریر کے جملے

تمام مثبت ہوں پس موافق ضابطہ فوریر کی مساوات مفروضہ کی کوئی قیمت دینا لا = صہ اور لا = صہ

کے نہیں ہوگی

## سولہواں باب لاگر انٹر کی ترکیب

(۲۱۱) ہم فی الہی بیان کیا ہی کہ قیمتیں ناطقہ محدودہ کن ترکیبوں سی دریافت ہوتی ہیں اب ہم بیان کرتے ہیں کہ مساوات کی حقیقی قسم قیمتوں کی قدر عددی تقریباً کن حسابوں سی دریافت ہوتے ہیں

سٹریم حساب کی ضابطہ سی ہم بات ہمیشہ ہم کو معلوم ہو سکتی ہی کہ کتنی قیمتیں ایک یون معلوم میں واقع ہو سکتی ہیں اور ہر ہم اس یون معلوم کو ایسی چوٹی چوٹی یون میں تقسیم کر سکتی ہیں کہ جنکی درمیان میں جہاں جہاں قیمت واقع ہو فرض کرو کہ ہم کو معلوم ہی کہ مساوات کی ایک ہی قیمت ہی اور صرف ایک ہی قیمت دو مقدار میں معلوم سہ اور صدہ کی درمیان واقع ہی اب ہم یہ دریافت کرنا چاہتی ہیں کہ اس قیمت کی قدر تقریباً کیا سہ اور صدہ کی درمیان ایک مقدار لرو اور اسکو بجای لا کے ج (لا) میں رکھو تو ح (لر) کی علامت سی ہم کو یہ بات معلوم ہو جائیگی کہ قیمت سہ اور لر کے درمیان واقع سہ یا لر اور صدہ کے درمیان فرض کرو کہ وہ سہ اور لر کے باہر واقع ہی تو ہر بجای لا کے ہم ایک مقدار میں جو باہر سہ اور لر کے واقع ہو رکھیں گی اور ح (لر) کے علامت سی یہ دریافت کرینگے کہ قیمت سہ اور لر کے درمیان واقع ہی یا سہ اور لر کے بیچ میں واقع ہی اب اسی عمل جاری رکھیں جب تک کہ قیمت کے قدر عددی تقریباً ہم کو خط خواہ حاصل ہو پھر مل میں جس یون درمیان قیمت واقع ہوگی اسکی تصیف ہوتی جائینگے

جو عمل بیان ہم بیان کیا او میں مشتق شافہ او ٹھانی پڑتی ہی اور بڑا طول طویل عمل کرنا پڑتا سہ اسکی ترکیبیں ایجاد ہوئیں ہیں جنسی کہ عمل مختصر ہو جاتا ہی او میں سی اول ہم لاگر انٹر کی ترکیب بیان کرتے ہیں

(۲۱۲) فرض کرو کہ لا = مساوات ہی جسکی نسبت ہم کو یہ معلوم ہی کہ او کی صرف ایک قیمت دو مثبت صحیح متصلہ اور لا کی درمیان واقع ہی لا = ۱ + ۱/۲ کی رکھو اور لا کی اس قیمت کو مساوات مفروضہ میں مندرج کر دو تو ح (لر) = ۱ + ۱/۲ = اب اگر اس مساوات کو کسی خالص کرین تو ایک مساوات کی اسی درجہ کی حاصل ہو جائیگی جس درجہ کی مساوات لا کی تھی اسکو ح (لر) =

لاگراثر کی ترکیب بقرب

باش از فہم

۱۳۷

تعبیر کردہ مساوات کی طرف ایک قیمت مثبت ہوگی کیونکہ اصل مساوات میں لائی ایک قیمت  
۱ اور ۱ + ا کی درمیان واقع ہے اب ہم صحاح متصلہ ۱ و ۲ و ۳ کو مح (د) میں بجای کر  
رکھ رکھ رکھ کر یہ دیکھنا کہ وہ کونسی دو نتائج متصلہ ہیں کہ جنکی علامتیں مختلف ہیں فرض کرو کہ یہ  
دو نتیجے ب اور ب + ا حاصل ہوئے جنکی درمیان واقع ہنی د = ب + ا کی مقرر کرو اور  
ا و س کو بجای دے کی مندرجہ کردہ نوع (ب + ا) = ۰ تو موافق سابق کی یہاں بھی ایک مساوات  
حاصل ہوگی جسکی مقدار مجموعہ قیمت ایک ہی مثبت ہوگی اور ہم صحاح متصلہ س اور س + ا بھی تحقیق  
کر سکتے ہیں جنکی درمیان قیمت ی کی واقع ہو

پس ی = س +  $\frac{1}{2}$  مقرر کرو اور علیٰ ہذا القیاس

پس لائی قیمت خاطر خواہ تقریباً اس مسلسل کے صورت میں دریافت ہو جائیگی

$$لا = ۱ + ب + \frac{۱}{س} + \dots$$

(۲۱۳) اب فرض کرو کہ مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک سی زیادہ قیمتیں درمیان صحاح ۱ اور ۱ + ا کے درمیان

سٹریم حساب کی ضابطہ کی موافق بالبعض اور قیمتوں کے جدا جدا کرنے کے ترکیب سے یہ ہم تحقیق  
کر سکتے ہیں کہ مساوات کی قیمتوں کو جو اون دو صحاح متصلہ کی درمیان واقع ہیں کس عدد میں  
ضرب دین کے حاصل ضرب اسی حاصل ہوں کہ وہ مختلف صحاح متصلہ کی درمیان واقع ہوں  
اب مساوات کی بہت بدل کر ایک اور ایسی مساوات پیدا کرو کہ اوسکی قیمتیں مساوات مفروضہ  
کی قیمتوں کی ضعاف موافق اس عدد حاصل کی ہوں یعنی اس مساوات کی قیمتیں برابر مساوات مفروضہ  
کی قیمتوں اور اس عدد کے حاصل ضرب کے ہوں اور پھر اس بدلے ہوئی مساوات پر ہوں دفعہ

گذشتہ کے عمل کرو

یہ ہم دفعہ گذشتہ کی عمل تعبیر مساوات کی بہت بدلتی کی کام میں لائیں اس حالت میں مساوات کی  
ایک سی زیادہ مثبت قیمتیں ہوں گیں یہ قیمتیں میں سب بڑی صحیح عدد کو ہم تلاش کریں  
اور یہ جدا جدا حساب کی مختلف قیمتوں کی لکائیں یہ بھی ہو سکتی ہے کہ مساوات کی



ایک سی زیادہ قیمتیں خاص صحاح متصلہ کی درمیان واقع ہوں تو مساواتی سے اونکے

اند نیز پیدا کرو اور پہر ایک قیمت کا حساب جاری رکھو اور یہی عمل کئی جاؤ

(۲۱۴) مساوات معلوم ح (۱۱) = سی ج (۱ +  $\frac{1}{3}$ ) = کے حاصل کرو

یعنی ح (۱۱) کون درجہ کا فرض کر کے یہ حاصل کرو کہ

$$ج (۱) + \frac{1}{2} ج (۱) + \frac{1}{3} ج (۱) + \frac{1}{4} ج (۱) + \dots + \frac{1}{n} ج (۱) =$$

ن میں ضرب دو تو یہ حاصل ہوگا کہ

$$ن ج (۱) + \frac{1}{2} ن ج (۱) + \frac{1}{3} ن ج (۱) + \dots + \frac{1}{n} ن ج (۱) =$$

پس مساوات کی بنانی کی واسطی عدد قیمتیں ح (۱) اور ح (۱) اور ح (۱) ...

دریافت کرنی چاہی اور ان عدد قیمتوں کا حساب موافق دفعہ کی ہو سکتا ہی مگر دفعہ لاین جو

ہم فی بیان کیا ہی کہ ایسی ہوں کی کرنی کی ترکیب ہو زمر حسب کی ترکیب کے باب میں بیان ہوگی

وہی بیان ہم بیان کرتی ہیں اور یہی کیفیت مساواتی کی منی کی ہے

دفعات ۱۵۸ اور ۵۸ پر رجوع کرنی سی لاگرانژ کی ترکیب تقریب سطح بیان ہو سکتی ہے کہ

فرض کرو ایک قیمت مساوات مفروضہ کی ۱ اور ۱ + کی درمیان واقع ہوتی ہی مساوات کی قیمتیں بقدر

۱ کے گٹھاؤ اور پہر مساوات متکافہ اسکی بناؤ اور اس اخر مساوات کی ایک قیمت ب اور ب + ۱ کے

درمیان دریافت کرو اور قیمتوں کو بقدر ب کی گٹھاؤ اور مساوات متکافہ بناؤ

اور پہر اس اخر مساوات کی قیمت س اور س + ۱ کی درمیان تحقیق کرو اور قیمتوں کو بقدر س کی گٹھاؤ

اور مساوات متکافہ بناؤ اور اسی طرح عمل کئی جاؤ تو یہ کہ متسلسل

$$۱ + \frac{1}{b} + \frac{1}{s} + \dots$$

اصل مساوات کی ایک قیمت ہوگی

(۲۱۵) مثالی لا ۲ - لا ۵ =

دفعہ ۸ - کے موافق مساوات کی ایک اصلی قیمت ہی اور چونکہ دفعہ ۲۰ کی بہر قیمت ثبت مقدار ہوگی

اور امتحان ہی معلوم ہوتا ہے کہ وہ ۱۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہے

فرض کرو کہ  $2 = \frac{1}{3} + 1$  تو

$$ج (2) = 2^2 - 2 \times 2 - 5 = 1 -$$

$$ح (2) = 2 - 2 \times 3 = 1 -$$

$$\frac{1}{4} ح (2) = 2 \times 3 = 4 =$$

پس مساوات کی  $-3 = 10 - 4 + 1 = 0$  یعنی

$$3 - 10 - 4 = 1 - 10 - 4 = 0 = \text{اسکو صحیح (د) کہو}$$

یہاں  $د = 10$  کے مح (د) کو منفی اور  $د = 11$  مح (د) کو مثبت بنانا ہی اس واسطی قیمت مطلوب

د کی ۱۰ اور ۱۱ کے درمیان واقع ہوگی  $د = 10 + \frac{1}{3}$  کے فرض کر دو

$$ج (10) = 10^2 - 10 \times 4 - 1 = 41 -$$

$$ح (10) = 4 - 10 \times 2 - 10 \times 3 = 4N =$$

$$\frac{1}{4} ح (10) = 10 - 10 \times 3 = 20 =$$

اور مساوات کی  $41 - 4N + 20 = 1 + 20 = 0$  یعنی

$$41 - 4N - 20 = 1 - 20 = 0 = \text{اسکو صحیح (د) سی تعبیر کرو}$$

یہاں  $د = 2$  کے صح (د) کو مثبت بنانا ہی پس قیمت مطلوب سی کی ۱۱ اور ۱۲ کے درمیان واقع ہے

فرض کرو کہ  $1 = \frac{1}{5} + 1$  تو

$$صح (1) = 1^2 - 1 \times 20 - 1 \times 4N = 5N -$$

$$صح (1) = 20 - 1 \times 188 - 1 \times 143 = 25 -$$

$$\frac{1}{4} صح (1) = 4N - 1 \times 183 = 89 =$$

مساوات کی  $5N - 25 + 89 = 1 + 89 = 0$  یعنی

$$0 = 5N - 25 - 89 = 1 -$$

## باب شانزدہم

لاگرا ترکی ترکیب تقرب

اس مسائل سے معلوم ہوتا ہے کہ دکن قیمت اور ۲ کے درمیان واقع ہے سلی ہوائی بنی کی عمل کرو

اسی معلوم ہوا کہ لا = ۲ +  $\frac{1}{1+}$   $\frac{1}{1+}$   $\frac{1}{1+}$  وغیرہ

بس مسلسل کے مقربین ۲ و ۱ د ۲۳ د ۴۴ ... میں جبریمقابلہ کا جو الیساوان باب دیگر  
 ۴۴ اور قیمت کی اصل قدر میں فرق کم بہ نسبت  $\frac{۱}{۲۱} \frac{۱}{(۱۱+۲۱)}$  یعنی کم بہ نسبت  $\frac{۱}{۶۴}$  کے ہے  
 ایک اور مثال کی وسطی بیہدات ۳-۴+۴-۵=۰ موجب دفعہ ۱۰۸ کے مساوات کے  
 تمام اصلی قیمتیں ہیں اور موجب بڑھ چھ کی ضابطہ کی بہت ثابت ہو سکتا ہے کہ ایک قیمت درمیان  
 اور ۱۱ کی دفعہ ہی اور دوسرے قیمت ۱۱ اور ۲ کے درمیان ہیو وسطی اگر لا =  $\frac{۱}{۱۱}$  کے لکھیں  
 اور مساوات لاکھی بنائیں تو مساوات کی ایک قیمت ۱۲ اور ۳ کے درمیان اور ایک قیمت ۳ اور ۱۱ کے  
 درمیان واقع ہوگی اور مساوات لاکھی بہی (۱۱-۳) =  $\frac{۱}{۱۱}$  + ۰ =

يعني  $\Delta - 28 - 54 = 0$

قیمت جو ۲ اور ۳ کے درمیان دافع ہے یہ ہوگی کہ

$$+ 2 + \frac{1}{+1} + \frac{1}{+2} + \frac{1}{+2} + \frac{1}{+2} + \dots$$

اور قیمت جو ۳ اور ۴ کے درمیان واقع ہو

$$\frac{1}{1+r} + r$$

۱۱۔ قیمتوں میں سے ہر ایک قیمت کے نصف کرنی سے اصل مساوات کی قیمتیں دریافت ہو جائیں گی  
 یا ہم لاگر ان کے ترکیب اصل مساوات پر کام میں لائیں اور مساوات کی بہت کو ابتداً تبدیل نہ کریں  
 فرض کرو کہ  $1 = \frac{1}{x} + 1$  تو  $(\frac{1}{x} + 1) - 1 = (\frac{1}{x} + 1) - 1 = 0$  سے پہلے حاصل ہو گا کہ

۲.  $1 + s + s^2 + \dots = \frac{1}{1-s}$  سے تعبیر کرو

یہاں (۱) مثبت ہی اور ج (۲) منفی اور ج (۳) مثبت ہی پس ایک قیمت ثبت کی اور ۲ کے

باشا نزدیم

لاگرانژ کی ترکیب تقریب

۱۳۸

در میان اور دوسرے قیمت ۲ اور ۳ کی ابتدا واقع ہوگی تو  $1 + \frac{1}{2}$  اول قیمت کو تقریباً معلوم کرنی کی واسطی اور  $2 + \frac{1}{2}$  دوسری قیمت کو تقریباً دریافت کرنے کے واسطی فرض کرو

ساوات ۱ - ۲ = ۰ کی ایک منفی قیمت ہی اس کو اس طرح دریافت کر سکتی ہیں کہ لاکو - لاکو بدل دو اور مساوات مستحصلہ کی قیمت کا حساب لگاؤ یعنی مساوات

$$(-3) - 4 = 0 \text{ کا}$$

چونکہ مساوات ۱ - ۲ = ۰ کی تینوں قیمتوں کا مجموعہ صفر ہے تو جب دو قیمتوں

کا حساب تقریباً ہو جائیگا تو تیسری قیمت کا حساب بھی تقریباً معلوم ہو جائیگا

(۲۱۶) اگر لاگرانژ کی ترکیب کے اندر ہم کو ایسی مساوات حاصل ہو کہ اس کی قیمت ایک صحیح عدد ہو

تو اصل مساوات کی ہم کو ایک قیمت مسلسل محدود میں دریافت ہوگی یعنی ہم کو قیمت کمزور

محدود ناطق حاصل ہوگی لیکن اگر پہلی مساوات مفروضہ کی تمام قیمتیں محدود اور ناطق کمزور

یا صحیح تحقیق کرنی ہیں اور ان کی موافق اجزاء ضربی مساوات سے ساقط کر لی جوتی تو یہ

بات ہرگز نہ واقع ہوگی

(۲۱۷) لاگرانژ کی ترکیب میں بات کا واقع ہونا ممکن ہی کہ ہم کو ایسی مساوات حاصل ہو کہ وہ کسی

مساوات قابل سی بالکل مطابقت رکھتی ہو تو اس حالت میں خارج قسمت کے مسلسل کے مقرر واقع ہو

اور اس سبب سے مسلسل ایک سرے مکرر یا دورہ بن جائیگی اور اس کی قیمت مساوات درجہ دوم

کے حل کرنے سے معلوم ہوگی جبر مقابلہ کا ۴۵ باب دیکھو

اس مساوات درجہ دوم کی قیمتوں میں درجہ دوم کا اضماع ملے گا اور بموجب دفعہ ۴۷ کی اس

مساوات کی دونوں قیمتیں مساوات مفروضہ کی ہے دو قیمتیں ہوں گیں

(۲۱۸) دفعہ ۲۱۵ میں جس عمل کو تمثیل مساوات ۱ - ۲ = ۰ کی دوسری ترکیب کا انداز

لکھا ہی اس کو ہم بیان علی العموم لکھتے ہیں

سمارا بڑا مطلب ذہن میں یہی ہے کہ جب مساوات مفروضہ کی ایک سی زیادہ قیمتیں درمیان صحیح متصلہ کی واقع ہوں تو لاگرانژ کی ترکیب کو عمل میں لائیں فرض کرو کہ  $(\lambda) = 0$  کے مساوات مفروضہ ہو

اب جملی مستعان  $(\lambda)$  اور  $(\lambda)$  اور  $(\lambda)$  ... سطر صاحب کے ضابطہ حاصل کرو اور وہاں ٹھہراؤ جہاں ایسا مستعان جملہ حاصل ہوگا کہ وہ  $\lambda$  کی سب قیمتوں کی سطح پر واقع ہو۔ دفعہ ۱۹۹ کہو فرض کرو کہ ایک سی زیادہ قیمتیں مساوات مفروضہ کی صحیح متصلہ

اور  $(\lambda)$  +  $(\lambda)$  درمیان واقع ہیں  $\lambda$  کی جگہ  $(\lambda)$  +  $(\lambda)$  جملوں  $(\lambda)$  اور  $(\lambda)$  اور  $(\lambda)$  ... میں رکھو اور جو انکی صورت ہو انکو  $(\lambda)$  اور  $(\lambda)$  اور  $(\lambda)$  ... سی تکرار اگر جملوں کے دوسرے سلسلہ میں متواتر کوئی سی ایسی دو عدد  $(\lambda)$  اور  $(\lambda)$  ... کہ میں تو دونوں صورتوں میں جو تغیرات علامت ہونگی ان کا تفاوت مساوات  $(\lambda)$  = کی تعداد اور قیمتوں کی ہونگی جو  $(\lambda)$  اور  $(\lambda)$  +  $(\lambda)$  درمیان واقع ہوں وہ اسکی یہی ہے کہ  $(\lambda)$  اور  $(\lambda)$  اور  $(\lambda)$  ... میں جو  $(\lambda)$  اور  $(\lambda)$  +  $(\lambda)$  مندرج کرنی سی نتائج حاصل ہوتی ہیں وہ وہی ہوتے ہیں جو سلسلہ  $(\lambda)$  اور  $(\lambda)$  اور  $(\lambda)$  ... میں جدا گانہ  $(\lambda)$  +  $(\lambda)$  اور  $(\lambda)$  +  $(\lambda)$  کے

مندرج کرنی سی حاصل ہوتی ہیں ہوا سطحی تغیرات علامت کی تعدادوں کا تفاوت برابر مساوات  $(\lambda)$  = کی تعداد اور قیمتوں کی ہوگا کہ جو  $(\lambda)$  +  $(\lambda)$  اور  $(\lambda)$  +  $(\lambda)$  کی درمیان واقع ہوں یعنی مساوات  $(\lambda)$  = کی تعداد قیمتوں کی جو  $(\lambda)$  اور  $(\lambda)$  +  $(\lambda)$  کی درمیان واقع ہوں

پھر اگر یہ کہ پہلے پہلے ہو کہ  $(\lambda)$  کی ایک قیمت سی زیادہ قیمتیں درمیان صحیح متصلہ  $(\lambda)$  اور  $(\lambda)$  کے واقع ہوں  $(\lambda)$  کی جگہ  $(\lambda)$  اور  $(\lambda)$  اور  $(\lambda)$  ... میں اور  $(\lambda)$  کی جگہ دو متواتر صحیح متصلہ کی کہ میں سی ہم کو یہیافت ہوگا کہ  $(\lambda)$  کی ایک سی زیادہ قیمتیں

دو صحیح متصلہ کے درمیان واقع ہیں یا نہیں اسی طرح عمل کئی جا نیگی جب تک کہ ہم کو ایسی قیمتیں حاصل ہوں گی کہ جسکی ایک ہی قیمت درمیان دو صحیح متصلہ

نیوٹن صاحب کی ترکیب باب اور اوس پر فوریر کا ضمیمہ

۱۲۰

باب ہفتم

کے واقع ہوں اور جب ہمہ حاصل ہوگا تو سٹریم صاحب کی ضابطہ کے جملوں کی احتیاج نہیں رہے گی اور بموجب دفعہ ۲۱۲ کے اس خاص قیمت کا حساب ہو جائیگا پس اس طرح قیمتوں کو جدا جدا کر سکتی ہیں اور اوس کا حساب لگا سکتی ہیں اور ان میں سے کسی کو نہیں چھوڑیں اب اگر ہم کو  $(1)$  و  $(2)$   $(3)$   $(4)$   $(5)$   $(6)$   $(7)$   $(8)$  کی قیمتیں دریافت کرنی منظور نہ ہوں بلکہ اوکمی علامتیں دریافت کرنی مطلوب ہوں تو ہم صعب رٹوں میں ان جملوں کو  $(1)$  کی ایسی قوتوں میں ضرب دی سکتی ہیں کہ اوکو سکروں ہی خاص کر دین اس واسطی کہ قیمت مقدار ہی فرض کی گئی ہی ہر ایک فوت اوکی مثبت ہی مثلاً بجای  $(1)$  کی یعنی بجای  $(1 + \frac{1}{2})$  کے ہم ہمہ لکھیں کہ

$$(1) + (1) + (1) + \dots + (1) + \frac{1}{2} (1) + \dots$$

اور  $(1)$  کون درجہ کا فرض کر لیں

## ستر ہواں باب

نیوٹن صاحب کی ترکیب تقرب اور اوس پر فوریر کا ضمیمہ

(۲۱۹) اب ہم ترکیب تقرب نیوٹن صاحب کی لکھتی ہیں جسی قیمت مساوات کی قدر عددی کا حساب تقریباً ہوتا ہے

فرض کرو کہ  $(1) =$  مساوات ہی اور اوکی ایک قیمت خاص حدود سے اور صہ کی درمیان واقع ہی اور ان حدود میں فرق بقدر ایک چھوٹی کسر کے ہی فرض کرو کہ اس ایک ایسی مقدار سے اور صہ کی درمیان ہی کہ وہ قیمت مطلوب ہی تقرب اولین رکھتی ہی اور  $(1) =$  شہیک قیمت ہی صہ ایک چھوٹی سی کسر ہی جسکا تشخیص کرنا منظور ہے

پس  $(1) + (1) =$  یعنی بموجب دفعہ ۱۰ کے

$$(1) + (1) + (1) + \dots + (1) + \frac{1}{2} (1) + \dots + (1) + \frac{1}{2} (1) + \dots =$$

اب چونکہ صہ ایک چھوٹی سی کسر فرض کی گئی ہی تو صہ اور صہ  $\dots$  بمقابلہ صہ کے

نہایت چھوٹی ہوگی پس اگر دوسری قوت اور اسی بڑی قوتوں کو اوپر کی مساوات میں ساتھ کر دوں تو یہ حاصل ہوگا کہ

$$C(S) + H(S) = 0$$

$$پس H = - \frac{C(S)}{C(S)}$$

تو یہ فرض کر کے کہ ہم کو سطح بہ فہمیت صہ کی تقریباً دریافت ہوئی ہی س -  $\frac{C(S)}{C(S)}$  ایک تقریب جدید مساوات مفروضہ کا حاصل ہوا اس تقریب جدید کو س اسی تعبیر کرو تو موافق سابق کی عمل کرنی ہی س -  $\frac{C(S)}{C(S)}$  لکھا و تقریب جدید حاصل ہوگا اور علیٰ ہذا تعین اب ہم اون شرائط کا امتحان کما حقہ کرنی ہیں جنکی موافق یہ ترکیب بغیر کسی خطا اور نقص استعمال میں آئی اور اسی امتحان کا ضروری ہونا ظاہر ہی کیونکہ اگر  $C(S)$  بمقابلہ  $C(S)$  کی چھوٹا ہو تو قیمت تقریبی صہ کی ایک چھوٹی کسر نہیں ہوگی اور چھوٹی کسر ہونا اور سکا لوازمات سے ہے

(۲۰) ایک مساوات پریم نیوٹن حساب کی ترکیب تقریب کا امتحان کرتی ہیں اور یہ مساوات بھی ہی جو خود نیوٹن حساب فی منتخب کی ہی یعنی  $2 - 3 - 5 = 0$  کو  $(S)$  سے تعبیر کر دیا یہاں  $2 = 3$  کے  $C(S)$  کو منفی اور  $3 = 5$  کے  $C(S)$  کو مثبت بنانا ہے اسے معلوم ہوا کہ مساوات  $C(S) = 0$  کی ایک قیمت ۲ اور ۳ کی درمیان واقع ہی اور  $2 - 3 = 1$  کے  $C(S)$  کو مثبت بنانا ہی تو قیمت درمیان ۲ اور ۳ کی واقع ہوگی اور  $2 - 3 = 1$  ہی  $C(S)$  کو مثبت بنانا ہی تو قیمت ۲ سی فرق بقدر ۱ کی ہی نہیں رکھتی پس فرض کرو کہ  $S = 2$  تو

$$S = 2 - S = \frac{C(S)}{C(S)} = S - \frac{S^2 - 2S - 5}{2S - 3}$$

$$= 2 - \frac{4 - 4 - 5}{4 - 3} = 2 - \frac{-1}{1} = 2 + 1 = 3$$

$$پس S = 2.424$$

پس ایک اور تقرب جدید کے لئے یہ حاصل ہوگا کہ

$$س - ج = \frac{(س)}{(ج)} = ۲۰۸۵۲ - ۵۰۰۰۰ تقریباً$$

$$۲۰۸۵۱۴۸ = ۲۰۰۰۰$$

(۲۲۱) یہ عمل نظریات میں سان ہی اور علیات میں مشکل نہیں ہی مگر اوسمیں چند احتیاطیں ضرور ہیں تاکہ کامیابی کا اوسمیں یقین ہو اب ہم اول احتیاطوں کا بیان کرنے میں مضمر کردہ کہ س قدر تقریبی مساوات کی قیمت کی ہی اور س = س - ج (س) اب ہم کو یہ یقین بغیر تحقیقات کا حقہ کی نہیں ہو سکتا کہ

کہ س بہ نسبت س کی اصل قیمت سی اقریب ہی مثال گذشتہ میں اول ہم نی یہ تحقیق کیا کہ

ایک قیمت ۲ اور ۲ کے درمیان واقع ہی اور یہ فیہ فرض کیا کہ ۲ اور ۲ تقرب اولین ہے

اور اوسی ایک تقرب جدید ۲۰۸۵۱۴۸ استخراج کیا لیکن یہ ہم کو تحقیق نہیں کہ ۲۰۸۵۱۴۸

بہ نسبت ۲ کی اصل قیمت سی اقریب ہی لیکن اگر بجای لا کی ۲ کے رکھو تو ج (لا) مثبت

ہوتا ہی پس قیمت مطلوب ۲ اور ۲ کے درمیان واقع ہے اور اسی ہم کو معلوم ہوگا کہ

۲۰۸۵۱۴۸ بہ نسبت ۲ کی اصل قیمت سی اقریب تر ہی لیکن اب ہی ہم کو یہ نہیں معلوم کہ

۲۰۸۵۱۴۸ بہ نسبت ۲ کی اصل قیمت سی زیادہ قریب ہی اگر ہم ۲۰۸۵۱۴۸ کو ج (لا) میں لیں

تو ج (لا) مثبت دریافت ہوگا تو اسی یہ معلوم ہوتا ہی کہ قیمت ۲۰۸۵۱۴۸ اور ۲ کے

درمیان واقع ہونا ہی پس ۲۰۸۵۱۴۸ بہ نسبت ۲ کے زیادہ قریب اصل قیمت سی ہے

(۲۲۲) فوراً صاحب فی ایک قاعدہ ایسا لکھا ہی کہ اوسکی موافقی عمل کرنے سی مشقت بار بار

امتحان کرنی کی نہیں پڑتی جیسی کہ اوپر کی مثال میں پڑی تھی اور جب بعض شرائط پورے

ہو جاتی ہیں تو یہ نیوٹن صاحب کی ترکیب اس قاعدہ سی مستند ہو جاتی ہے

نیوٹن صاحب کی ترکیب کا ضخیم فوریر کا جملہ معلوم کی اول جملہ شتہ کی ایک خاصیت

پر موقوف ہے جسکو ہم ثابت کرتے ہیں



(۲۲۳) اگر ۱ اور ۲ دو مقدارین ہوں تو کوئی مقدار درمیان ۱ اور ۲ کی ایسی ضرور ہوگی

$$ح (ب) - ح (۱) = (ب - ۱) ح (۱)$$

اسو اسطی کہ فرض ح (۱) بقیر ح (۱) - ح (۱) =  $\frac{۱-۱}{ب-۱}$  [ ح (ب) - ح (۱) کو کترنا

تو ۱ = ۱ کے ہونی سی یا لا = ب کے ہونے سی ح (۱) معدوم ہوتا ہے اسو اسطی

بموجب قعہ ۰۲ کی مساوات ح (۱) = کی قیمت درمیان ۱ اور ۲ کی ضرور ہوگی اور

$$ح (۱) = ح (۱) - \frac{ح (ب) - ح (۱)}{ب - ۱}$$

اسی معلوم ہوا کہ کوئی مقدار لر درمیان ۱ اور ۲ کی ضرور ایسی ہوگی کہ ح (۱) - ح (ب) =  $\frac{ح (۱) - ح (ب)}{ب - ۱}$

$$اسو اسطی ح (ب) - ح (۱) = (ب - ۱) ح (۱)$$

(۲۲۴) فرض کرو کہ ب بڑا ۱ سی ہی تو ح (ب) جبر مقابله کی اعتبار سی بڑا ح (۱) ہوگا

اگر ح (۱) مثبت ہی اور چھوٹا ح (۱) سے ہوگا اگر ح (۱) منفی ہے

اگر ح (۱) مثبت ہی درمیان لا = ۱ اور لا = ب کے ہو تو ح (۱) ضرور مثبت ہوگا

اور اگر ح (۱) منفی درمیان لا = ۱ اور لا = ب کی ہو تو ح (۱) ضرور منفی ہوگا

پس اسی پہ نتیجہ پیدا ہوا کہ اگر ح (۱) کسی بون کے درمیان استقلال کی ساتھ مثبت ہو

تو ح (۱) اوس بون کی درمیان لا کی ساتھ بڑی کا اور اگر ح (۱) استقلال لا منفی ہو

تو ح (۱) اوس بون کی درمیان لا کی ساتھ کھٹی گا اس کی اور زیادتی سے مراد

ہماری جبر مقابله کی زیادتی اور کمی سی ہی اب ہم اپنی نتیجہ کو اسطرح بیان کیا کرتے ہیں

اگر ح (۱) کی کسی بون کی درمیان ایک ہی علامت ہو اور ح (۱) کی دہی علامت ہو جو ح (۱) کی

تو جیسا لا اوس بون کی درمیان بڑی گا اب ہی ح (۱) تعداد بڑی گا

اور اگر ح (۱) کی علامت مخالف ح (۱) کے علامت کے ہو تو

جیسا لا اول بون کے درمیان کھٹی گا اب ہی ح (۱) گہٹی گا

(۲۲۵) اب ہم خود بڑے قاعدہ کو بیان کرتی ہیں اور ثابت کرتی ہیں فرض کرو کہ ح (۱) = مساوات ہو

جب تک صرف ایک ہی قیمت درمیان سے اور صدہ کی ہو اور فرض کرو کہ  $\chi' = 0$  کے کوئی قیمت درمیان سے اور صدہ کی نہیں ہے اور  $\chi' = 0$  کی بھی کوئی قیمت سے اور صدہ کے بائیں نہیں ہے تو اس حالت میں نیوٹن کی ترکیب تقرب ضرور کامیابی کے ساتھ جلیگی اگر اس کا آغاز دیا جائے کہ جہاں  $\chi$  (لا) اور  $\chi'$  (لا) کی ایک ہی علامت ہو اور پھر اگے اس کو جاری کریں ہماری فرضوں سے یہ استخراج ہوتا ہے کہ  $\chi$  (لا) علامت کو صرف ایک دفعہ سے اور صدہ کے درمیان بدلتا ہے اور  $\chi'$  (لا) اور  $\chi$  (لا) اپنی علامت سے اور صدہ کے درمیان نہیں بدلتی ہم صدہ سے کوئی قیمت فرض کرینگے

(۱) فرض کرو کہ  $\chi$  (لا) اور  $\chi'$  (لا) کی جب  $\chi = 0$  کے ہو ایک ہی علامت ہے یہ تقرب اولین فرض کو تو نیوٹن کے ترکیب کے موافق تقرب ثانی سے -  $\chi$  (سہ)  $\chi$  (سہ) اور فرض کرو کہ  $\chi = 0$  سے قیمت کی بالکل صحیح قدر ہے تو

$\chi$  (سہ + صدہ) = ۰ اب بموجب دفعہ ۲۲۳ کے ہم کو یہ حاصل ہے کہ

$\chi$  (سہ + صدہ)  $\chi$  (سہ) = صدہ  $\chi$  (لر) اس میں لر درمیان سے اور صدہ + صدہ کے واقع ہی ہیں صدہ = -  $\chi$  (لر) اور ٹھیک قدر قیمت کی سے -  $\chi$  (سہ)  $\chi$  (لر) ہے پس ہم کو یہ ثابت کرتا رہا کہ صدہ -  $\chi$  (سہ)  $\chi$  (سہ) بہ نسبت صدہ کے اصلی قیمت سے زیادہ قریب ہی چونکہ صدہ ضرور ایک مثبت مقدار ہی تو  $\chi$  (سہ) اور  $\chi$  (لر) کی مختلف علامتیں ہیں اور  $\chi$  (سہ) کی وہی علامت ہی جو  $\chi$  (سہ) کی علامت ہی اور اسی واسطی  $\chi$  (۱)

اور  $\chi$  (سہ) مختلف علامت ہیں اسی معلوم ہوا کہ  $\chi$  (لا) تعداداً اب کم ہوتا ہے جیسا لا درمیان سے اور صدہ کے زیادہ ہوتا ہے پس  $\chi$  (لر) تعداداً کم

$\chi$  (سہ) سی ہوا اسی واسطی -  $\chi$  (سہ) ایک مثبت مقدار ہے جو تعداداً کم بہ نسبت مقدار -  $\chi$  (سہ) کے ہی اسی ثابت ہوتا ہے کہ نیوٹن کا تقرب ثانی

قیمت حقیقی کی قدر کے زیادہ قریب بہ نسبت تقریب اولین کے ہے  
فرض کرو کہ  $۱ = \text{ج} - \frac{(\text{صہ})}{\text{ج}}$  توح  $(\text{صہ})$  اور  $\text{ج} = (\text{صہ})$  کی ایک ہی علامت ہے  
اور تقریب ۱ سے جاری ہوتا ہے۔

(۲) فرض کرو کہ  $\text{ج} (لا)$  اور  $\text{ج} (لا)$  کی جب  $لا = \text{صہ}$  کے ہو ایک ہی علامت ہے  
صہ کو تقریب اولین فرض کرو تو نیوٹن حساب کی ترکیب کے موافق تقریب ثانی  $\text{صہ} - \frac{(\text{صہ})}{\text{ج}}$  ہوگا  
فرض کرو کہ  $\text{صہ} + \text{صہ}$  قیمت کی صحیح صحیح قدر ہی توح  $(\text{صہ} + \text{صہ}) =$

اب بموجب دفعہ ۲۲۳ کے  $\text{ج} (\text{صہ} + \text{صہ}) - \text{ج} (\text{صہ}) = \text{ج} (لر)$  اسمین لر در میان  
صہ اور  $\text{صہ} + \text{صہ}$  کے واقع ہی پس  $\text{صہ} = \frac{(\text{صہ})}{\text{ج} (لر)}$  پس اب ہم کو بہم ثابت کرنا رہا  
کہ  $\text{صہ} - \frac{(\text{صہ})}{\text{ج}}$  قیمت حقیقی کی زیادہ تر تقریب بہ نسبت  $\text{صہ}$  کے ہی چونکہ  $\text{صہ}$  ضرور  
منفی ہی توح  $(\text{صہ})$  اور  $\text{ج} (لر)$  کی ایک ہی علامت ہی اور  $\text{ج} (\text{صہ})$  کی وہی علامت ہے  
جو  $\text{ج} (\text{صہ})$  کی علامت ہی اور  $\text{ج} (لر)$  اور  $\text{ج} (\text{صہ})$  کی ایک ہی علامت ہے  
اسی معلوم ہوا کہ بموجب دفعہ ۲۲۴ کے کہ  $\text{ج} (لا)$  تعداداً ایسا ہی زیادہ ہوتا ہے جیسا کہ  
لا در میان  $\text{صہ}$  اور  $\text{صہ}$  کی زیادہ ہوتا ہی پس  $\text{ج} (لر)$  تعداداً کم بہ نسبت  $\text{ج} (\text{صہ})$  کے ہوا  
اس واسطی  $\text{ج} (\text{صہ})$  ایک نسبت مقداری اور تعداد چھوٹی بہ نسبت مثبت مقدار  $\text{ج} (\text{صہ})$  کے ہی  
اسی ثابت ہوتا ہی کہ نیوٹن حساب کی ترکیب کے موافق تقریب ثانی حقیقی قیمت کے قدر کے  
قریب تر بہ نسبت تقریب اولین کے ہے

فرض کرو کہ  $۱ = \text{صہ} - \frac{(\text{صہ})}{\text{ج}}$  توح  $(\text{صہ})$  اور  $\text{ج} = (\text{صہ})$  کی ایک ہی علامت  
ہی اور تقریب  $\text{صہ}$  سے اگے جاری ہوگا

(۲۲۴) دفعہ گذشتہ سی بخوبی ثابت ہو گیا کہ فوراً پھر بشرط لکھی ہیں وہ نیوٹن حساب کی ترکیب  
کی کامیابی کی اتنی کافی ہیں جب بہ بشرط پوری ہو جائیں اور اوس حدی کہ جس کے موافق  
 $\text{ج} (لا)$  اور  $\text{ج} (لا)$  کی ایک ہی علامت ہو تقریب شروع ہو کر جاری ہو تو قیمتیں متواترہ حاصل

ہو لیکن جس میں ہر ایک قیمت کی اصل قدر تک مساوی طریقہ ہی بشرطیکہ جس میں ہم چلی ہیں چھوٹی قیمت کی اصل قدر سی ہو اور گھٹتی ہی اگر حد مذکور ہر سی قیمت کی اصل قدر سی ہو اب ہم اختصار کے ساتھ یہ ثابت کرینگے کہ فورس کی شرائط کا ہونا ضروری ہے ایک قیمت مفروضہ سی چھلیں تو نیوٹن حساب کا تقرب ثانی - ج (س) زیادہ کرنی ہو چکرے اور قیمت کی قدر حقیقی ج (س) کے زیادہ کرنی سی حاصل ہوگی اسی ثابت ہوا کہ ج (لا) کے استواری علامت ضروری نہ کہ ہم کو تحقیق ہو کہ ج (س) اور ج (لر) کی ایک ہی علامت ہے اگر ان مقداروں کی ایک علامت نہ ہو تو صحت نیوٹن کی علامت غلط ہوگی اور نیوٹن کا تقرب ثانی قیمت کی اصلی قدر سی بہ نسبت تقرب اولین کے بڑا ہوگا

استواری علامت ج (لا) کی ضروری نہ کہ اسی ہم تحقیق ہو کہ ج (لر) تعداد کم بہ نسبت ج (س) کے ہو اگر یہ صورت نہ ہو تو صحت نیوٹن تعداد بڑی بہ نسبت اصلی صحت کی ہوگی اور اس طرح صحت کی ٹھیک علامت فرض کرنی سی قیمت کی حقیقی قدر درمیان نیوٹن کے تقرب اول اور دوم کے درمیان واقع ہوگی اس حالت میں نیوٹن کا تقرب ثانی قریب تر قیمت کے حقیقی قدر کے بہ نسبت تقرب اول کی ہو سکتا ہی مگر اول کا ہونا کچھ ضروری نہیں

(۲۲۷) دفعہ ۲۲۰ کی مثال میں ثابت ہو سکتا ہی کہ مساوات ج (لا) = ۰ صرف ایک قیمت ۱۲ اور ۱۱

کے درمیان واقع ہی اور مساوات ج (لا) = ۰ اور ج (لا) = ۰ کی کوئی قیمت ان حدود کی درمیان نہیں واقع ہوتی اور جب لا = ۰ کے ہو تو ج (لا) اور ج (لا) دونوں مثبت ہیں پس نیوٹن کی ترکیب یعنی کامیابی حاصل ہوگی اگر اس کا آغاز اور اجراء ۲ سے کریں

ایک اور مثال لا = ۰ لا = ۰ کی کوئی قیمت ۱۱ اور ۱۲ کے درمیان واقع ہے اور ج (لا) = ۰ ہو سکتی ہی کہ مساوات کی ایک قیمت ۱۱ اور ۱۲ کے درمیان واقع ہے اور ج (لا) = ۰

اور ج (لا) = ۰ کی قیمتیں درمیان ان حدود کی نہیں واقع ہیں اور نیز جب لا = ۰ اور ج (لا) اور ج (لا) = ۰ کی کوئی قیمت ۱۱ اور ۱۲ کے درمیان واقع ہے اور ج (لا) = ۰

اجرا کریں نیوٹن کی ترکیب تقریبی کا مسابا لینی حاصل ہوگی

(۲۲۸) اب ہم پہلے بلا ٹینکے کہ سرعت تقریب کا تخمینہ کس طرح ہونا ہی فرض کرو کہ عمل کی کسی مرتبہ میں

ہم کو کسی قیمت کی قدر تقریبی حاصل ہوئی ہو قیمت کی صحیح قدریں -  $\frac{ج (س)}{ج (لر)}$  ہے

پس عددی قدر غلطی کی اس مرتبہ میں  $\frac{ج (س)}{ج (لر)}$  ہی اسکو رسی ثمر کرو اور اسے مابعد

قدر تقریبی س -  $\frac{ج (س)}{ج (لر)}$  اور اب غلطی کی عددی قدر  $\frac{ج (س)}{ج (لر)}$  -  $\frac{ج (س)}{ج (لر)}$

یعنی  $\frac{ج (س)}{ج (لر)}$  اور بموجب دفعہ ۲۲۳ کی ہم کو معلوم ہی کہ  $\frac{ج (س)}{ج (لر)}$  -  $\frac{ج (س)}{ج (لر)}$  =

(س - لر)  $\frac{ج (لو)}{ج (لو)}$  آئیں لہذا درمیان س اور لر کے واقع ہوتا ہے پس غلطی

$\frac{ج (س - لر)}{ج (لو)}$  ہی اب لہذا درمیان س اور قیمت کی حقیقی قدر کی درمیان واقع ہوتا ہی

پس س - لہذا درمیان س ہو پس غلطی کم بہ نسبت  $\frac{ج (لو)}{ج (س)}$  کے ہی اب فرض کرو کہ

$\frac{ج (لا)}{ج (لا)}$  کی سب سے بڑی قیمت جو درمیان ان حدود کی ہو وہ سب سے چھوٹی قیمت  $\frac{ج (لا)}{ج (لا)}$  پر تقسیم

کی جا ہی اور خارج قسمت ق سی تغییر ہو تو غلطی بدرجہ اولی کم ق ۲ سے ہوگی

دفعہ ۲۲۰ کے مثل میں قیمت ۱۲ اور ۲ کے درمیان واقع ہوتی ہی

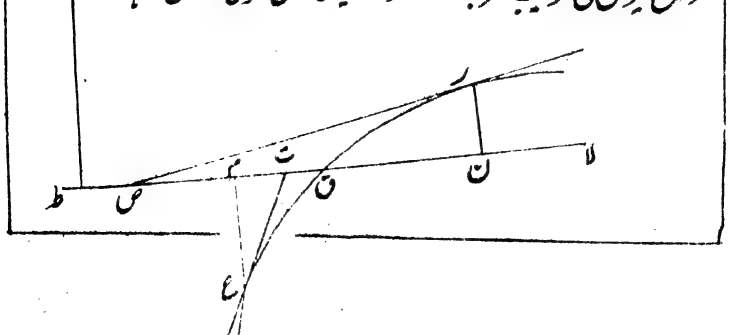
پس ق کی قیمت دریافت کرنی کی واسطی قیمت ۴ لہذا جو ب لا = ۲ کے قیمت ۳ لا - ۲

جب لا = ۲ کے تقسیم کرو تو ق = ۱۲ اور چونکہ ق تقریباً واحد کے برابر ہے تو ٹھیک

مرتبہ اعشاریہ تقریب میں قریب دو چند کے ہر دفعہ کے عمل میں ہونگے

(۲۲۹) جو خطوط منحنی کی مسائل میں اصول علم مفصولات کو کام میں لانا طالب علم جانتی میں اسکو علم ہونا

موافق نیوٹن کی ترکیب تقریب کے قاعدہ خودیر کی توضیح کرنی ہسان ہے



فرض کرو کہ ح (۱۱) خط منحنی کا حصہ مساوات = ح (۱۲) سے دریافت ہوتا ہے اور کم اور دن ہم کو معلوم ہیں اور ح کی قیمت دریافت کرنی ہی یعنی وہ نقطہ دریافت کرنا ہی ہے خط منحنی محور کو کاٹتا ہے

نقطہ پر ظاہر ہی کہ ح (۱۱) منفی ہی اگر ط و محور کی مثبت سمت مقرر کی جائے اور ح (۱۲) بھی نقطہ پر منفی ہی کیونکہ خط منحنی ع پر محور لا کے لحاظ سے محذب ہے اور ماس ع ت کہنچو اور فرض کرو کہ م = سہ تو م ت = - ح (سہ) موافق علم حرکات کے ہوگا

پس م سی تقریب نیوٹنی شروع ہوتا ہی اورت کی طرف چلتا ہی اور چونکہ ت درمیان م اور ن کی واقع ہوتا ہی تو اسی ظاہر ہوتا ہی کہ ت سی اخیر ترکیب تقریب کا کامیابی کہتا ہو سکتا ہے نقطہ ربح (۱۱) مثبت ہی اور ح (۱۲) منفی ہی ماس رص کہنچو اور تقریب نیوٹنی سے شروع ہوتا ہی اور ص کی طرف جاری ہوتا ہی اور ص اور ن مختلف سمت میں ت واقع ہیں علاوہ برین یہ یقینی نہیں ہی کہ ص ق چھوٹا ت ن سی ہی اور یہ یقینی نہیں ہے کہ لعر ص سی جاری ہوتا ہی پس تقریب ن سی شروع ہوتا ہے طالب علم شکنیں مرقم کر کی شرط ح (۱۱) اور ح (۱۲) کے حدود مذکور میں علامت نہ بدلنی کی توضیح کر سکتا ہے

### نہار ہوان باب صورنر کی ترکیب

(۲۳۰) قیمت مساوات کی قدر تقریباً دریافت کرنی کی لئی اب ہم ترکیب تقریب لکھی ہیں جسکو مورنر صاحب فی ایجاد کیا ہے

فرض کرو کہ ح (۱۱) = مساوات ہو تو ح (ط + لا) = - وہ مساوات ہوگی جسکی

قیمتیں اول مساوات کی قیمتوں سی بقدر ط کے کم ہوں گیں

مساوات ج (لا + ط) کو تشریح کر کے کہ لکھیں تو یہ حاصل ہوگا کہ



اور ص کو بجای لاوب وس اور ڈاؤر کے کام میں لائیں

$$1 = 1$$

$$1 ط + ع = 2 ط + ب = سر کے لکھو$$

$$سر ط + ق = 3 ط + 2 ب + س = جر کے لکھو$$

$$حر ط + ی = 4 ط + 3 ب + 2 س + د = سر کے لکھو$$

$$سر ط + ص = 5 ط + 4 ب + 3 س + 2 د + ح = ط$$

(۳) ۱ ح (ط) کا حساب مثل ج (ط) کے کرو اور حروف لا اور برو و سر کو کام میں لاؤ تو

$$1 = 1$$

$$1 ط + بر = 3 ط + ب = شر کے لکھو$$

$$سر ط + جر = 4 ط + 3 ب + س = مر کے لکھو$$

$$سر ط + سر = 5 ط + 4 ب + 3 س + د = ۱ ح (ط)$$

(۴) ۱ ط (ط) کا حساب کرو اور د سر و سر کو کام میں لاؤ

$$1 = 1$$

$$1 ط + سر = 4 ط + ب = فر کے لکھو$$

$$فر ط + مر = 5 ط + 4 ب + س = ۱ ح (ط)$$

(۵) اب ۱ ح (ط) کا ہیط حساب کر سکتی ہیں اور فر کو کام میں لاؤ

$$1 = 1$$

$$1 ط + فر = 5 ط + ب = ۱ ح (ط)$$

$$(۶) اخر ۱ ح (ط) = ۱ ح (ط)$$

اوپر کے عمل کو اس ترتیب سے لکھو تو نہایت آسانی ہوگی





درمیان واقع ہی اور امتحان سی دریافت کرو کہ زیادہ سی زیادہ کتنی سوین حصہ اس قیمت میں شامل ہیں فرض کرو کہ سوین حصی ہیں

اول فرض کرو کہ ۷۰ قیمت پانچوین مساوات کی ہی تو اسی بہہ معلوم ہوتا ہے کہ ۳۷۲۵۸۷ ٹھیک قیمت اول مساوات کی ہے

دوم فرض کرو کہ ۷۰ ٹھیک قیمت مساوات پنجم کی نہیں ہے تو اسی بہہ تبسط ہوگا کہ ایک مساوات ہے جسکی قیمتیں مساوات اول کی قیمتوں سی بقدر ۳۷۲۵۸۷ کے چھوٹی ہیں اور اسکی قیمت ۱۰ اور ۱۰ کے درمیان واقع ہی پس مساوات اول کی قیمت ۳۷۲۵۸۷ اور ۳۷۲۵۸۸ کے درمیان واقع ہے

پس اسی معلوم ہوتا ہے کہ ایک سلسلہ اوس قسم کی قیمتوں کل جسکا ذکر اس ۲۳ میں ہوا کس طرح حاصل ہوتا ہے اور حقیقی قیمت یا تقریبی قیمت خاطر خواہ دریافت ہو جاتی ہے

(۲۳۳) ہم فی دفعہ گذشتہ میں بہہ بیان کیا ہے کہ بعض اعداد امتحان سی دریافت ہوتی ہیں اب ہم پہلے ایک طریقہ ان امتحانوں کی ہدایت کی لئی بتلائینگے فرض کرو کہ ح (لا) = ۰

مساوات مفروضہ ہو اور ایک یا زیادہ عملوں سی ہم فی ایک مساوات ایسی حاصل کی جسکی قیمتیں مساوات مفروضہ کی قیمتوں سی بقدر س کی کم ہوں یعنی بہہ فرض کرو کہ ہم مساوات

ح (س + لا) = ۰ کی حاصل کریں اور فرض کرو کہ اس مساوات کی ایک قیمت چھوٹی سی ہے تو اس مساوات کی ایک قیمت تقریبی ہوگی

پس اسی معلوم ہوا کہ موافق باب گذشتہ کی اکثر قیمت سی س - ح (س) اقرب ہوگا پس - ح (س) اوس عدد کی قدر تقریباً ہوگی جسکو اجزاء عمل کے واسطی ہم تلاش کریں گے

(۲۳۴) مثال فرض کرو کہ ح (لا) = ۲ لا ۳ - ۴ لا ۳ - ۲ لا ۳ - ۱۱ لا ۱۱ اب امتحان

معلوم ہوتا ہے کہ ح (۲۰۰) منفی ہی اور ح (۳۰۰) مثبت ہی پس مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک قیمت درمیان ۲۰۰ اور ۳۰۰ کے واقع ہی اب ہم وہ عمل کرتی ہیں جسبی قیمتوں

قیمتوں میں ہی ہر ایک قیمت بقدر ۲۰۰ کے کم ہو جائی

$$۲۰۰ - ۲۳۲ - ۲۴۳ -$$

$$۲۹۴۴۸۰۰ - ۱۵۴۰۰ - ۲۰۰$$

$$۲۹۴۴۵۱۱ - ۱۴۸۳۴ - ۷۳ -$$

$$\frac{۱۵۴۰۰}{۵۰۵۴۴}$$

$$\frac{۲۰۰}{۳۲۷}$$

$$\frac{۲۰۰}{۷۲۷}$$

اسی معلوم ہوا کہ مساوات ح (۱۱) = کی قیمتوں میں مساوات کی قیمتیں بقدر ۲۰۰ کی کم ہیں وہ یہ ہے کہ

$$۲۰۰ = ۲۹۴۴۵۱۱ - ۵۰۵۴۴ + ۷۲۷ + ۲۰۰$$

$$۵۰۵۴۴ = (۲۰۰) - ۲۹۴۴۵۱۱ \text{ اور } ۲۰۰ = ۵۰۵۴۴$$

اسی معلوم ہوا کہ - ح (۲۰) ریلیو قریب بہ نسبت ۵۰ کی ہی پس مساوات کی قیمتوں میں سے

ہر ایک قیمت کو بقدر ۵۰ کے کم کرتے ہیں

$$\begin{array}{r} ۵۰) ۲۹۴۴۵۱۱ - \\ \underline{۲۵۹۵۸۰۰} \\ ۱۴۲۸۷۱۱ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ۵۰۵۴۴ \quad ۷۲۷ \\ \underline{۲۱۳۵۰} \quad ۱۰۰ \\ ۴۱۴۱۴ \quad ۸۲۷ \end{array}$$

اس طرح سی ہم کو ۵۰ بہت بڑا عدد حاصل ہوا اس واسطی ح (۲۵) = ۱۴۲۸۷۱۱ مثبت ہے

اور ح (۲۰) منفی ہی پس قیمت چھوٹی ۲۵۰ سے ہوئی دفعہ ۲۳۳ کی ہدایت پر

چلنی سی اکثر ہم ایک بڑا عدد امتحان کی واسطی تجویز کر سینگے اور خاص کر ابتدا و عمل میں تو

بہت ضرور ہوگا اسی طرح کی کیفیت عدد کی جذر نکالنے میں واقع ہوتی ہے کہ ہم ایک بڑا عدد

جذد میں تجویز کرتے ہیں جسی جذر نہیں نکلتا

اب ہم ۲۰ پر امتحان کر سینگے

$$\begin{array}{r} ۲۹۴۴۵۱۱ - \\ \underline{۳۳۱۳۸۲۰} \\ ۳۴۳۰۶۹۱ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ۵۰۵۴۴ \quad ۷۲۷ \quad ۲ \\ \underline{۳۲۲۸۰} \quad ۸۰ \\ ۸۲۸۷۴ \quad ۸۰۷ \end{array}$$

پس ۲۰ بھی بہت بڑا ہے کیونکہ ح (۲۲) مثبت ہے

اب ہم ۳۰ پر امتحان کرتے ہیں

|           |       |     |
|-----------|-------|-----|
| ۲۹۴۷۵۱۱ - | ۵۰۵۴۴ | ۷۲۷ |
| ۲۲۲۵۲۸۰   | ۲۳۴۱۰ | ۴۰  |
| ۷۴۲۲۳۱ -  | ۷۴۱۷۴ | ۷۸۷ |
|           | ۲۵۸۱۰ | ۴۰  |
|           | ۹۹۵۸۴ | ۸۴۷ |
|           |       | ۴۰  |
|           |       | ۹۰۷ |

پس ج (۲۳۰) = ۷۴۲۲۳۱ منفی مقدار ہی پس ۳۰ ایک مناسب عدد ہے  
پس مساوات جسکی قیمتیں مساوات ج (۷۴) = ۰ کے قیمتوں سے بقدر ۲۳ کے کم ہیں  
وہ یہ ہے کہ ۲۷ + ۷۴۰ + ۷۴۵۸۴ + ۷۴۲۲۳۱ = ۰

یہاں ج (۲۳۰) = ۹۹۵۸۴ پس ج (۲۳۰) = ۷ کے تقریباً  
اب مساوات کی قیمتیں بقدر ۷ کے گھٹاتے ہیں

|          |        |     |
|----------|--------|-----|
| ۷۴۲۲۳۱ - | ۹۹۵۸۴  | ۷۰۷ |
| ۷۴۲۲۳۱   | ۷۴۱۷۷  | ۱۴  |
|          | ۱۰۴۰۳۳ | ۹۲۱ |

اسی ثابت ہوتا ہے کہ ج (۲۳۷) = ۰ پس ۲۳۷ ایک قیمت اصل مساوات کی ہے  
کل عمل کو لکھنا چاہیے

|                   |        |       |
|-------------------|--------|-------|
| ۲۳۷ ۷۱۱ -         | ۲۳۷ -  | ۷۷۲ - |
| ۲۹۴۷۵۱۱ -         | ۱۴۰۰ - | ۷۰۰   |
| ۲۹۴۷۵۱۱ * ۱۴۸۳۲ - |        | ۷۳ -  |
| ۲۲۲۵۲۸۰           | ۷۵۸۰۰  | ۷۰۰   |
| ۷۴۲۲۳۱ + ۵۰۵۴۴ *  |        | ۷۲۷ * |
| ۷۴۲۲۳۱            | ۲۳۴۱۰  | ۷۰۰   |
|                   | ۷۴۱۷۴  | ۷۲۷   |
|                   | ۲۵۸۱۰  | ۴۰    |
|                   | ۹۹۵۸۴  | ۷۸۷   |
|                   | ۷۴۱۷۷  | ۴۰    |
|                   | ۱۰۴۰۳۳ | ۸۴۷   |
|                   |        | ۴۰    |
|                   |        | ۹۰۷   |
|                   |        | ۱۴    |
|                   |        | ۹۲۱   |



بیان کیا ہے وہ درست بیٹھا ہے  
(۲۳۴) دفعہ گذشتہ میں جو مساوات لکھی تھی اسکو دوسری مثال سمجھاؤ اور اسکی قیمت ۱۱ اور ۲ کے درمیان دریافت کرو

|              |             |        |
|--------------|-------------|--------|
| ۱۵۲۰۱۴ / ۵   | ۲ -         | ۳ -    |
| ۲ -          | ۲ -         | ۱ -    |
| ۱۰۰۰ *       | ۲ -         | ۲ -    |
| ۹۹۲ -        | ۱ -         | ۱ -    |
| ۸۰۰۰۰۰       | ۵۰۰ - *     | ۱ -    |
| ۲۸۶۹۳۹۹ -    | ۲           | ۱۰۰ *  |
| ۳۱۲۰۴۰۱۰۰۰ + | ۲۹۹ -       | ۲      |
| ۲۹۲۶۰۴۰۴۰ -  | ۸           | ۲      |
| ۱۹۳۵۲۰۰۴۴    | ۲۸۸۰۰۰ - X  | ۲      |
|              | ۴۰۱         | ۲      |
|              | ۲۸۶۹۳۹۹ -   | ۲      |
|              | ۴۰۲         | ۴۰۰    |
|              | ۲۸۶۸۶۹۶۰۰ f | ۱      |
|              | ۳۴۲۱۴       | ۴۰۱    |
|              | ۲۸۶۸۲۳۲۸۲ - | ۱      |
|              | ۳۴۲۵۲       | ۴۰۲    |
|              | ۲۸۶۸۶۲۳۲ -  | ۱      |
|              |             | ۴۰۳۰ f |
|              |             | ۴      |
|              |             | ۴۰۳۴   |
|              |             | ۴      |
|              |             | ۴۰۴۲   |
|              |             | ۴      |
|              |             | ۴۰۴۸   |

اس دفعہ اور دفعہ ۲۳۵ کی ترتیب میں فرق اس بات سے پیدا ہوتا ہے کہ عمل میں یہہ اکثر دستوری کہ علامت عشریہ کی ساقط اوسطیہ کر دیتی ہیں جس طرح کہ اعداد کا تقریبی جذ کی نکالنی میں قیمت میں جو جزو عشریہ ہو اسکی واسطی یہہ قاعدہ کافی ہے کہ جب تمام ہندسی صحیح عدد کے قیمت میں معلوم مہجائیں اور کسر عشریہ کے پیدا ہونے کی نوبت پہنچی تو دہان عمل کی اول خانہ میں دائیں طرف ایک صفر لگاؤ اور عمل کے دوسرے خانہ میں دو صفر اور تیسرے خانہ میں تین صفر اور علیٰ ہذا القیاس اگر اور خانی عمل کی تین سے

## ہورنر کی ترکیب

باب ششم

104

۱۵۷  
زائد ہوں اور ہر عمل ایک فنہ کا اس طرح کر دو کہ گویا سیب ہی ہندی قیمت کی اعداد صحیح ہی تھی اور

پہر صفرون کا الحاق موافق سابق کی عمل میں لاؤ

اب اس بات پر غور کرو کہ قیمت میں جب ۲ نکل چکی بعد اس کی جو ہندسہ مثل صحیح کی تقریباً تجربہ کرنا

۸۸۸ - ای اور ہم ایک سی کم سی پس ایک صفر قیمت میں لگاؤ اور اصل خامیوں میں ایک

صفر اور دو اور زیادہ صفر دوسرے خانے عمل میں اور تین اور زیادہ تیسرے میں الحاق کر کے

اور عمل موافق مسالحت کی کرو

یہ بہ امر ظاہر ہے کہ ایشیہ گذشتہ میں اول خانہ میں عمل کا اختصار ہو سکتا تھا کیونکہ یہاں فی ہفتہ

کہ جو تاج عمل تہوں اور انکو لکھیں اور سان سان عمل کو ذہن من کرن مگر تم فی خاصہ سبحانے

کے واسطے کل عمل کی صورت مفصل لکھی ہے لیکن اس کا اختصار نہیں کیا

(۳۳۷) جب قیمت میں بعض ہندی نکل اسی تو عمل مختصر کی اعانت سب اور ہندی قیمت کی فہرست

سرو جانیں اس کی مثال مساوات  $1+2+3+4+5 = 15$  کی مثبت قیمتوں کے دریا کر زمین دیتی ہیں

قیمت میں باغ مرتضیٰ عشرہ کہ جب تک ہم کو دینا ہو گئی عملِ غنا م اور کمال کر سکتے

[illegible]





اب ہند کا آخری قیمت کا ہی اور مرحلہ عمل کا دیمان ختم ہوتا ہی جہاں پہلے نشان ہے  
 اب ۳ کو دوسرے خانہ عمل میں ہی ساقط کر دو اور ۴ کو اول خانہ عمل میں ہی تو اول خانہ عمل تو نابود  
 ہو جائیگا مگر پہری کچھ ان قیمت کی ہندسہ ۱ خری ۳ پر کری گا اور جب ۴ کو ۳ میں ضرب دیں  
 اور دو ہندسی ساقط کریں تو ۲ باقی رہینگے  
 اب دو خانہ عمل کی باقی رہی ہیں اور باقی عمل کی بالکل مطابق تقسیم مختصر کی قاعدہ معمولی کی ہی  
 اور اسی اٹھ ہندسی اور قیمت میں مستنبط ہونگے

|            |           |
|------------|-----------|
| ۱۰۶۹۸۸۰۱ - | ۱۱۲۸۷۵۲۱۰ |
| ۱۰۱۵۸۷۸۵   |           |
| ۹۸۱۱۱۱۲ -  | ۱۱۲۸۷۵۲۱  |
| ۵۴۸۳۷۱     |           |
| ۷۷۷۳۵۱ -   | ۱۱۲۸۷۵۲   |
| ۷۷۷۳۵۱     |           |
| ۹۰۱۰۰ -    | ۱۱۲۸۷۵    |
| ۷۹۰۱۳      |           |
| ۱۱۰۸۷ -    | ۱۱۲۸۷۶    |
| ۱۰۱۵۸      |           |
| ۹۲۴ -      | ۱۱۲۷۸     |
| ۹۰۲ -      |           |
| ۲۷ -       | ۱۱۲۷      |
| ۲۷ -       |           |
| ۵ -        | ۱۰۱       |

کو خاک دریز

اس تقریب پر اعتبار آخر ہندسہ تک ہو سکتا ہی اور کم از کم درجہ اس اعتبار کا یہ ہے کہ آخر ہندسہ کچھ  
 اس واسطی کہ اگر کل عمل تمام و کمال کیا جاتا تو آخر خانہ عمل میں بہت سی ہندسی اون ہندسون  
 کی دایئیں طرف ہوتی جواب لکھی ہوئی ہیں مگر وہ ہندسی جواب لکھی ہوئی ہیں تو اسکی مقامات  
 میں کچھ تغیر نہیں واقع ہوا لیکن شاید تغیر ہو تو فقط اتنا ہوگا کہ بعض سطروں کے آخر ہندسہ میں  
 دوسری سطروں کے آخر ہندسی بقدر ایک کے فرق رہے

(۲۳۸) دفعہ گذشتہ میں جو قیمت دریا ہوئی ہی وہ مساوات ۲ - ۳ - ۱۱ - ۱۲ - ۵ = ۵  
 منہ قیمت کی قدر عددی ہی پس ہی معلوم ہوا کہ دفعات ۱۲۳۵ اور ۲۳۶ میں جو قیمتیں دریا ہوئی





کی ہم کو اصلی قیمتیں دریافت کرنی مطلوب ہوں گیں اسی معلوم ہوا کہ مساوات معلوم کی ہم نامکن قیمتیں اس طرح دریافت کر سکتے ہیں کہ ایک اور خاص مساوات بنائیں اور اس کی اصل قیمتیں دریافت کریں اسلئے ہم ثابت کرینگے کہ اون دو جہول کی مساواتوں میں سے ایک جہول کو دور کر کے سطح ایک جہول کی مساوات بنانی میں اکیسویں باب میں معادلات کی نامکن قیمتوں کی دریافت کرنی کی ایک اور ترکیب لکھینگے طالب علم کو چاہیے کہ وہ تہہ فورد کی او میں ضمون کو دیکھی جسمیں انہوں نے اعداد میں مساواتوں کی حل کرنی کی ترکیب کامل بیان کی

### اونیسواں باب قیمتوں کی بالقریہ جملی

(۲۸۲) ایک جملہ دو یا زیادہ مقداروں کا بالقریہ اون مقدار کے لحاظ سے کہلاتا ہے

جو اوس میں اس طرح واقع ہوں کہ اگر اون میں سے دو درمیں تبادل ہو تو جملہ نہ متبدل ہو

مثلاً  $1 + 2 + 3$  جملہ بالقریہ تین مقداروں  $1$ ،  $2$ ،  $3$  کا ہے

اور نیز  $1 + 2 + 3$  جملہ بالقریہ اونہیں مقدار کا ہے اسلئے کہ اگر  $1$  اور  $2$  میں

دو دو کو اندر تبادل ہو تو جملہ متبدل نہیں ہوتا

(۲۸۳) مساوات کی مثال جملی بالقریہ اس کی قیمتوں کی ہوتے ہیں

اس واسطی کہ بموجب دفعہ ۴ کے مساوات  $1 + 2 + 3 = 6$  میں

$1 + 2 + 3 = 6$  مجموعہ قیمتوں کے

$1 + 2 + 3 = 6$  دو قیمتوں کی حاصل ضربوں کے مجموعہ کے

اور علی ہذا القیاس اور یہی مرقطاس ہے کہ جو جملی قیمتوں کی یہاں واقع ہوتی ہیں بالقریہ ہوتے ہیں

اس باب کا مطلب اعظم یہ ہے کہ ہم یہ ثابت کریں کہ ہر ایک جملہ بالقریہ ناطقہ مساوات کی

قیمتوں کا مساوات کی مثال کی قیمتوں میں بیان ہو سکتا ہے اب ہم آغاز اس طلب کا نیوٹن صاحب

کی اوس ضابطہ سے کرتے ہیں جو مساوات کی قیمتوں کی قواعد جمع کرنے کے باب میں ہے

(۲۸۴) فرض کرو کہ  $1 + 2 + 3 = 6$  میں  $1 + 2 + 3 = 6$  کو  $1 + 2 + 3 = 6$

تعبیر کرنا ہی اور اوبوس اور سوات ج (لا) = کی قیمتوں کو بغیر کرنے ہیں

فرض کرو کہ ص<sub>۱</sub> = ۱ + ب + س + د + ...

ص<sub>۲</sub> = ۱ + ب + س + ۲ + د + ...

ص<sub>۳</sub> = ۱ + ب + س + ۳ + د + ...

اور علیٰ ہذا القیاس ص مجموعہ قیمتوں کا ہی اور ص مجموعہ قیمتوں کے مجزوروں کا، اور ص مجموعہ قیمتوں کی مکعبوں کا ہی غرض بالعموم ص مجموعہ قیمتوں کے م قیمتوں کا ہے بموجب دفعہ ۴ کے

ص<sub>۱</sub> = ۱ + ب + س + د + ...  
اس متطابقہ کی بائیں طرف جو تقسیم لکھی ہیں وہ بموجب دفعہ ۱ کی ٹھیک ٹھیک ہو سکتی ہیں اور ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے کہ  
$$\frac{ص_1}{1-ب} = \frac{1}{1-ب} + \frac{ب}{1-ب} + \frac{س}{1-ب} + \frac{د}{1-ب} + \dots$$

اور اسی کی متماثل جملی  $\frac{ص_1}{1-ب}$  اور  $\frac{ص_2}{1-ب}$  حاصل ہوگی اور جمع کرنی ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے  
$$\frac{ص_1}{1-ب} = \frac{1}{1-ب} + \frac{ب}{1-ب} + \frac{س}{1-ب} + \frac{د}{1-ب} + \dots$$
  
اور نیز ج (لا) = ۱ + ب + س + د + ...  
ص<sub>۱</sub> = ۱ + ب + س + د + ...  
ص<sub>۲</sub> = ۱ + ب + س + ۲ + د + ...  
ص<sub>۳</sub> = ۱ + ب + س + ۳ + د + ...  
ص<sub>۴</sub> = ۱ + ب + س + ۴ + د + ...  
ص<sub>۵</sub> = ۱ + ب + س + ۵ + د + ...  
ص<sub>۶</sub> = ۱ + ب + س + ۶ + د + ...  
ص<sub>۷</sub> = ۱ + ب + س + ۷ + د + ...  
ص<sub>۸</sub> = ۱ + ب + س + ۸ + د + ...  
ص<sub>۹</sub> = ۱ + ب + س + ۹ + د + ...  
ص<sub>۱۰</sub> = ۱ + ب + س + ۱۰ + د + ...  
ص<sub>۱۱</sub> = ۱ + ب + س + ۱۱ + د + ...  
ص<sub>۱۲</sub> = ۱ + ب + س + ۱۲ + د + ...  
ص<sub>۱۳</sub> = ۱ + ب + س + ۱۳ + د + ...  
ص<sub>۱۴</sub> = ۱ + ب + س + ۱۴ + د + ...  
ص<sub>۱۵</sub> = ۱ + ب + س + ۱۵ + د + ...  
ص<sub>۱۶</sub> = ۱ + ب + س + ۱۶ + د + ...  
ص<sub>۱۷</sub> = ۱ + ب + س + ۱۷ + د + ...  
ص<sub>۱۸</sub> = ۱ + ب + س + ۱۸ + د + ...  
ص<sub>۱۹</sub> = ۱ + ب + س + ۱۹ + د + ...  
ص<sub>۲۰</sub> = ۱ + ب + س + ۲۰ + د + ...  
ص<sub>۲۱</sub> = ۱ + ب + س + ۲۱ + د + ...  
ص<sub>۲۲</sub> = ۱ + ب + س + ۲۲ + د + ...  
ص<sub>۲۳</sub> = ۱ + ب + س + ۲۳ + د + ...  
ص<sub>۲۴</sub> = ۱ + ب + س + ۲۴ + د + ...  
ص<sub>۲۵</sub> = ۱ + ب + س + ۲۵ + د + ...  
ص<sub>۲۶</sub> = ۱ + ب + س + ۲۶ + د + ...  
ص<sub>۲۷</sub> = ۱ + ب + س + ۲۷ + د + ...  
ص<sub>۲۸</sub> = ۱ + ب + س + ۲۸ + د + ...  
ص<sub>۲۹</sub> = ۱ + ب + س + ۲۹ + د + ...  
ص<sub>۳۰</sub> = ۱ + ب + س + ۳۰ + د + ...  
ص<sub>۳۱</sub> = ۱ + ب + س + ۳۱ + د + ...  
ص<sub>۳۲</sub> = ۱ + ب + س + ۳۲ + د + ...  
ص<sub>۳۳</sub> = ۱ + ب + س + ۳۳ + د + ...  
ص<sub>۳۴</sub> = ۱ + ب + س + ۳۴ + د + ...  
ص<sub>۳۵</sub> = ۱ + ب + س + ۳۵ + د + ...  
ص<sub>۳۶</sub> = ۱ + ب + س + ۳۶ + د + ...  
ص<sub>۳۷</sub> = ۱ + ب + س + ۳۷ + د + ...  
ص<sub>۳۸</sub> = ۱ + ب + س + ۳۸ + د + ...  
ص<sub>۳۹</sub> = ۱ + ب + س + ۳۹ + د + ...  
ص<sub>۴۰</sub> = ۱ + ب + س + ۴۰ + د + ...  
ص<sub>۴۱</sub> = ۱ + ب + س + ۴۱ + د + ...  
ص<sub>۴۲</sub> = ۱ + ب + س + ۴۲ + د + ...  
ص<sub>۴۳</sub> = ۱ + ب + س + ۴۳ + د + ...  
ص<sub>۴۴</sub> = ۱ + ب + س + ۴۴ + د + ...  
ص<sub>۴۵</sub> = ۱ + ب + س + ۴۵ + د + ...  
ص<sub>۴۶</sub> = ۱ + ب + س + ۴۶ + د + ...  
ص<sub>۴۷</sub> = ۱ + ب + س + ۴۷ + د + ...  
ص<sub>۴۸</sub> = ۱ + ب + س + ۴۸ + د + ...  
ص<sub>۴۹</sub> = ۱ + ب + س + ۴۹ + د + ...  
ص<sub>۵۰</sub> = ۱ + ب + س + ۵۰ + د + ...  
ص<sub>۵۱</sub> = ۱ + ب + س + ۵۱ + د + ...  
ص<sub>۵۲</sub> = ۱ + ب + س + ۵۲ + د + ...  
ص<sub>۵۳</sub> = ۱ + ب + س + ۵۳ + د + ...  
ص<sub>۵۴</sub> = ۱ + ب + س + ۵۴ + د + ...  
ص<sub>۵۵</sub> = ۱ + ب + س + ۵۵ + د + ...  
ص<sub>۵۶</sub> = ۱ + ب + س + ۵۶ + د + ...  
ص<sub>۵۷</sub> = ۱ + ب + س + ۵۷ + د + ...  
ص<sub>۵۸</sub> = ۱ + ب + س + ۵۸ + د + ...  
ص<sub>۵۹</sub> = ۱ + ب + س + ۵۹ + د + ...  
ص<sub>۶۰</sub> = ۱ + ب + س + ۶۰ + د + ...  
ص<sub>۶۱</sub> = ۱ + ب + س + ۶۱ + د + ...  
ص<sub>۶۲</sub> = ۱ + ب + س + ۶۲ + د + ...  
ص<sub>۶۳</sub> = ۱ + ب + س + ۶۳ + د + ...  
ص<sub>۶۴</sub> = ۱ + ب + س + ۶۴ + د + ...  
ص<sub>۶۵</sub> = ۱ + ب + س + ۶۵ + د + ...  
ص<sub>۶۶</sub> = ۱ + ب + س + ۶۶ + د + ...  
ص<sub>۶۷</sub> = ۱ + ب + س + ۶۷ + د + ...  
ص<sub>۶۸</sub> = ۱ + ب + س + ۶۸ + د + ...  
ص<sub>۶۹</sub> = ۱ + ب + س + ۶۹ + د + ...  
ص<sub>۷۰</sub> = ۱ + ب + س + ۷۰ + د + ...  
ص<sub>۷۱</sub> = ۱ + ب + س + ۷۱ + د + ...  
ص<sub>۷۲</sub> = ۱ + ب + س + ۷۲ + د + ...  
ص<sub>۷۳</sub> = ۱ + ب + س + ۷۳ + د + ...  
ص<sub>۷۴</sub> = ۱ + ب + س + ۷۴ + د + ...  
ص<sub>۷۵</sub> = ۱ + ب + س + ۷۵ + د + ...  
ص<sub>۷۶</sub> = ۱ + ب + س + ۷۶ + د + ...  
ص<sub>۷۷</sub> = ۱ + ب + س + ۷۷ + د + ...  
ص<sub>۷۸</sub> = ۱ + ب + س + ۷۸ + د + ...  
ص<sub>۷۹</sub> = ۱ + ب + س + ۷۹ + د + ...  
ص<sub>۸۰</sub> = ۱ + ب + س + ۸۰ + د + ...  
ص<sub>۸۱</sub> = ۱ + ب + س + ۸۱ + د + ...  
ص<sub>۸۲</sub> = ۱ + ب + س + ۸۲ + د + ...  
ص<sub>۸۳</sub> = ۱ + ب + س + ۸۳ + د + ...  
ص<sub>۸۴</sub> = ۱ + ب + س + ۸۴ + د + ...  
ص<sub>۸۵</sub> = ۱ + ب + س + ۸۵ + د + ...  
ص<sub>۸۶</sub> = ۱ + ب + س + ۸۶ + د + ...  
ص<sub>۸۷</sub> = ۱ + ب + س + ۸۷ + د + ...  
ص<sub>۸۸</sub> = ۱ + ب + س + ۸۸ + د + ...  
ص<sub>۸۹</sub> = ۱ + ب + س + ۸۹ + د + ...  
ص<sub>۹۰</sub> = ۱ + ب + س + ۹۰ + د + ...  
ص<sub>۹۱</sub> = ۱ + ب + س + ۹۱ + د + ...  
ص<sub>۹۲</sub> = ۱ + ب + س + ۹۲ + د + ...  
ص<sub>۹۳</sub> = ۱ + ب + س + ۹۳ + د + ...  
ص<sub>۹۴</sub> = ۱ + ب + س + ۹۴ + د + ...  
ص<sub>۹۵</sub> = ۱ + ب + س + ۹۵ + د + ...  
ص<sub>۹۶</sub> = ۱ + ب + س + ۹۶ + د + ...  
ص<sub>۹۷</sub> = ۱ + ب + س + ۹۷ + د + ...  
ص<sub>۹۸</sub> = ۱ + ب + س + ۹۸ + د + ...  
ص<sub>۹۹</sub> = ۱ + ب + س + ۹۹ + د + ...  
ص<sub>۱۰۰</sub> = ۱ + ب + س + ۱۰۰ + د + ...

متطابقہ میں مثال لائی کیساں قواء کے برابر لکھو تو

ص<sub>۱</sub> + ن ع = ۱ + ب + س + د + ...

ص<sub>۲</sub> + ن ع = ۱ + ب + س + ۲ + د + ...

اور علیٰ العموم

ص<sub>۱</sub> + ن ع = ۱ + ب + س + د + ...

یعنی ص<sub>۱</sub> + ع<sub>۱</sub> ص<sub>۲</sub> - م<sub>۱</sub> - ع<sub>۲</sub> ص<sub>۳</sub> - م<sub>۲</sub> - ع<sub>۳</sub> ص<sub>۴</sub> + م<sub>۳</sub> + ع<sub>۴</sub> ص<sub>۵</sub> - م<sub>۴</sub> - ع<sub>۵</sub> ص<sub>۶</sub> + م<sub>۵</sub> + ع<sub>۶</sub> ص<sub>۷</sub> - م<sub>۵</sub> - ع<sub>۷</sub> ص<sub>۸</sub> + م<sub>۷</sub> + ع<sub>۸</sub> ص<sub>۹</sub> - م<sub>۷</sub> - ع<sub>۹</sub> ص<sub>۱۰</sub> + م<sub>۹</sub> + ع<sub>۱۰</sub> ص<sub>۱۱</sub> - م<sub>۹</sub> - ع<sub>۱۱</sub> ص<sub>۱۲</sub> + م<sub>۱۱</sub> + ع<sub>۱۲</sub> ص<sub>۱۳</sub> - م<sub>۱۱</sub> - ع<sub>۱۳</sub> ص<sub>۱۴</sub> + م<sub>۱۳</sub> + ع<sub>۱۴</sub> ص<sub>۱۵</sub> - م<sub>۱۳</sub> - ع<sub>۱۵</sub> ص<sub>۱۶</sub> + م<sub>۱۵</sub> + ع<sub>۱۶</sub> ص<sub>۱۷</sub> - م<sub>۱۵</sub> - ع<sub>۱۷</sub> ص<sub>۱۸</sub> + م<sub>۱۷</sub> + ع<sub>۱۸</sub> ص<sub>۱۹</sub> - م<sub>۱۷</sub> - ع<sub>۱۹</sub> ص<sub>۲۰</sub> + م<sub>۱۹</sub> + ع<sub>۲۰</sub> ص<sub>۲۱</sub> - م<sub>۱۹</sub> - ع<sub>۲۱</sub> ص<sub>۲۲</sub> + م<sub>۲۱</sub> + ع<sub>۲۲</sub> ص<sub>۲۳</sub> - م<sub>۲۱</sub> - ع<sub>۲۳</sub> ص<sub>۲۴</sub> + م<sub>۲۳</sub> + ع<sub>۲۴</sub> ص<sub>۲۵</sub> - م<sub>۲۳</sub> - ع<sub>۲۵</sub> ص<sub>۲۶</sub> + م<sub>۲۵</sub> + ع<sub>۲۶</sub> ص<sub>۲۷</sub> - م<sub>۲۵</sub> - ع<sub>۲۷</sub> ص<sub>۲۸</sub> + م<sub>۲۷</sub> + ع<sub>۲۸</sub> ص<sub>۲۹</sub> - م<sub>۲۷</sub> - ع<sub>۲۹</sub> ص<sub>۳۰</sub> + م<sub>۲۹</sub> + ع<sub>۳۰</sub> ص<sub>۳۱</sub> - م<sub>۲۹</sub> - ع<sub>۳۱</sub> ص<sub>۳۲</sub> + م<sub>۳۱</sub> + ع<sub>۳۲</sub> ص<sub>۳۳</sub> - م<sub>۳۱</sub> - ع<sub>۳۳</sub> ص<sub>۳۴</sub> + م<sub>۳۳</sub> + ع<sub>۳۴</sub> ص<sub>۳۵</sub> - م<sub>۳۳</sub> - ع<sub>۳۵</sub> ص<sub>۳۶</sub> + م<sub>۳۵</sub> + ع<sub>۳۶</sub> ص<sub>۳۷</sub> - م<sub>۳۵</sub> - ع<sub>۳۷</sub> ص<sub>۳۸</sub> + م<sub>۳۷</sub> + ع<sub>۳۸</sub> ص<sub>۳۹</sub> - م<sub>۳۷</sub> - ع<sub>۳۹</sub> ص<sub>۴۰</sub> + م<sub>۳۹</sub> + ع<sub>۴۰</sub> ص<sub>۴۱</sub> - م<sub>۳۹</sub> - ع<sub>۴۱</sub> ص<sub>۴۲</sub> + م<sub>۴۱</sub> + ع<sub>۴۲</sub> ص<sub>۴۳</sub> - م<sub>۴۱</sub> - ع<sub>۴۳</sub> ص<sub>۴۴</sub> + م<sub>۴۳</sub> + ع<sub>۴۴</sub> ص<sub>۴۵</sub> - م<sub>۴۳</sub> - ع<sub>۴۵</sub> ص<sub>۴۶</sub> + م<sub>۴۵</sub> + ع<sub>۴۶</sub> ص<sub>۴۷</sub> - م<sub>۴۵</sub> - ع<sub>۴۷</sub> ص<sub>۴۸</sub> + م<sub>۴۷</sub> + ع<sub>۴۸</sub> ص<sub>۴۹</sub> - م<sub>۴۷</sub> - ع<sub>۴۹</sub> ص<sub>۵۰</sub> + م<sub>۴۹</sub> + ع<sub>۵۰</sub> ص<sub>۵۱</sub> - م<sub>۴۹</sub> - ع<sub>۵۱</sub> ص<sub>۵۲</sub> + م<sub>۵۱</sub> + ع<sub>۵۲</sub> ص<sub>۵۳</sub> - م<sub>۵۱</sub> - ع<sub>۵۳</sub> ص<sub>۵۴</sub> + م<sub>۵۳</sub> + ع<sub>۵۴</sub> ص<sub>۵۵</sub> - م<sub>۵۳</sub> - ع<sub>۵۵</sub> ص<sub>۵۶</sub> + م<sub>۵۵</sub> + ع<sub>۵۶</sub> ص<sub>۵۷</sub> - م<sub>۵۵</sub> - ع<sub>۵۷</sub> ص<sub>۵۸</sub> + م<sub>۵۷</sub> + ع<sub>۵۸</sub> ص<sub>۵۹</sub> - م<sub>۵۷</sub> - ع<sub>۵۹</sub> ص<sub>۶۰</sub> + م<sub>۵۹</sub> + ع<sub>۶۰</sub> ص<sub>۶۱</sub> - م<sub>۵۹</sub> - ع<sub>۶۱</sub> ص<sub>۶۲</sub> + م<sub>۶۱</sub> + ع<sub>۶۲</sub> ص<sub>۶۳</sub> - م<sub>۶۱</sub> - ع<sub>۶۳</sub> ص<sub>۶۴</sub> + م<sub>۶۳</sub> + ع<sub>۶۴</sub> ص<sub>۶۵</sub> - م<sub>۶۳</sub> - ع<sub>۶۵</sub> ص<sub>۶۶</sub> + م<sub>۶۵</sub> + ع<sub>۶۶</sub> ص<sub>۶۷</sub> - م<sub>۶۵</sub> - ع<sub>۶۷</sub> ص<sub>۶۸</sub> + م<sub>۶۷</sub> + ع<sub>۶۸</sub> ص<sub>۶۹</sub> - م<sub>۶۷</sub> - ع<sub>۶۹</sub> ص<sub>۷۰</sub> + م<sub>۶۹</sub> + ع<sub>۷۰</sub> ص<sub>۷۱</sub> - م<sub>۶۹</sub> - ع<sub>۷۱</sub> ص<sub>۷۲</sub> + م<sub>۷۱</sub> + ع<sub>۷۲</sub> ص<sub>۷۳</sub> - م<sub>۷۱</sub> - ع<sub>۷۳</sub> ص<sub>۷۴</sub> + م<sub>۷۳</sub> + ع<sub>۷۴</sub> ص<sub>۷۵</sub> - م<sub>۷۳</sub> - ع<sub>۷۵</sub> ص<sub>۷۶</sub> + م<sub>۷۵</sub> + ع<sub>۷۶</sub> ص<sub>۷۷</sub> - م<sub>۷۵</sub> - ع<sub>۷۷</sub> ص<sub>۷۸</sub> + م<sub>۷۷</sub> + ع<sub>۷۸</sub> ص<sub>۷۹</sub> - م<sub>۷۷</sub> - ع<sub>۷۹</sub> ص<sub>۸۰</sub> + م<sub>۷۹</sub> + ع<sub>۸۰</sub> ص<sub>۸۱</sub> - م<sub>۷۹</sub> - ع<sub>۸۱</sub> ص<sub>۸۲</sub> + م<sub>۸۱</sub> + ع<sub>۸۲</sub> ص<sub>۸۳</sub> - م<sub>۸۱</sub> - ع<sub>۸۳</sub> ص<sub>۸۴</sub> + م<sub>۸۳</sub> + ع<sub>۸۴</sub> ص<sub>۸۵</sub> - م<sub>۸۳</sub> - ع<sub>۸۵</sub> ص<sub>۸۶</sub> + م<sub>۸۵</sub> + ع<sub>۸۶</sub> ص<sub>۸۷</sub> - م<sub>۸۵</sub> - ع<sub>۸۷</sub> ص<sub>۸۸</sub> + م<sub>۸۷</sub> + ع<sub>۸۸</sub> ص<sub>۸۹</sub> - م<sub>۸۷</sub> - ع<sub>۸۹</sub> ص<sub>۹۰</sub> + م<sub>۸۹</sub> + ع<sub>۹۰</sub> ص<sub>۹۱</sub> - م<sub>۸۹</sub> - ع<sub>۹۱</sub> ص<sub>۹۲</sub> + م<sub>۹۱</sub> + ع<sub>۹۲</sub> ص<sub>۹۳</sub> - م<sub>۹۱</sub> - ع<sub>۹۳</sub> ص<sub>۹۴</sub> + م<sub>۹۳</sub> + ع<sub>۹۴</sub> ص<sub>۹۵</sub> - م<sub>۹۳</sub> - ع<sub>۹۵</sub> ص<sub>۹۶</sub> + م<sub>۹۵</sub> + ع<sub>۹۶</sub> ص<sub>۹۷</sub> - م<sub>۹۵</sub> - ع<sub>۹۷</sub> ص<sub>۹۸</sub> + م<sub>۹۷</sub> + ع<sub>۹۸</sub> ص<sub>۹۹</sub> - م<sub>۹۷</sub> - ع<sub>۹۹</sub> ص<sub>۱۰۰</sub> + م<sub>۹۹</sub> + ع<sub>۱۰۰</sub> ص<sub>۱۰۱</sub> - م<sub>۹۹</sub> - ع<sub>۱۰۱</sub> ص<sub>۱۰۲</sub> + م<sub>۱۰۱</sub> + ع<sub>۱۰۲</sub> ص<sub>۱۰۳</sub> - م<sub>۱۰۱</sub> - ع<sub>۱۰۳</sub> ص<sub>۱۰۴</sub> + م<sub>۱۰۳</sub> + ع<sub>۱۰۴</sub> ص<sub>۱۰۵</sub> - م<sub>۱۰۳</sub> - ع<sub>۱۰۵</sub> ص<sub>۱۰۶</sub> + م<sub>۱۰۵</sub> + ع<sub>۱۰۶</sub> ص<sub>۱۰۷</sub> - م<sub>۱۰۵</sub> - ع<sub>۱۰۷</sub> ص<sub>۱۰۸</sub> + م<sub>۱۰۷</sub> + ع<sub>۱۰۸</sub> ص<sub>۱۰۹</sub> - م<sub>۱۰۷</sub> - ع<sub>۱۰۹</sub> ص<sub>۱۱۰</sub> + م<sub>۱۰۹</sub> + ع<sub>۱۱۰</sub> ص<sub>۱۱۱</sub> - م<sub>۱۰۹</sub> - ع<sub>۱۱۱</sub> ص<sub>۱۱۲</sub> + م<sub>۱۱۱</sub> + ع<sub>۱۱۲</sub> ص<sub>۱۱۳</sub> - م<sub>۱۱۱</sub> - ع<sub>۱۱۳</sub> ص<sub>۱۱۴</sub> + م<sub>۱۱۳</sub> + ع<sub>۱۱۴</sub> ص<sub>۱۱۵</sub> - م<sub>۱۱۳</sub> - ع<sub>۱۱۵</sub> ص<sub>۱۱۶</sub> + م<sub>۱۱۵</sub> + ع<sub>۱۱۶</sub> ص<

اس نتیجہ عامہ میں مہربانیت کے چھوٹا فرض کیا گیا ہے

اس نتیجہ عامہ کی وساطت سے ہم مجموعہ قیمتیوں کی کم و بیش فہم کا مثال در قیمتوں کے ادنی درجہ کے

قوتوں کی قوتوں میں بیان کر سکتی ہیں اور اسی عمل کو مکرر کر کر کے ہی ہم فتنوں کی ام و میں ہوں۔

کوہنشاں کی رنموت مین بیان کر سکتی ہیں

اب فرض کرو کہ ہم کیساتھ نہ ہی تھوڑی ہوئی کی قید جاتی رہی مساوات معلوم ح (۱۱) =۔ کی

لا- ح میں ضرب دو ٹولہ- ح (لا) = - یعنی

$$= \epsilon_1 + \epsilon_1 \mu_1 + \epsilon_1 \mu_1^2 + \dots + \epsilon_n \mu_n + \epsilon_n \mu_n^2 + \dots$$

کی جگہ متواتر قیمتیں ۱۰۰ بوس... رکھو اور حاصل کو جمع کرو تو اس طرح

$$= \sum_{m=0}^{\infty} c_m + \sum_{m=1}^{\infty} c_m + \cdots + \sum_{m=n}^{\infty} c_m$$

اس سلسلے میں مساوات کی قیمتوں کی مردم دین قانون کی مجموعہ کو مثال مساوات اور

قیمتوں کی ادنی قوتوں کی قیمتوں میں اوس حالت میں کرم چہونان سی ہو بیان کر سکتی ہن اور

اسی عمل کو مکرمہ کر کرنی سی مساوات کی قیمتوں کی م قوتوں کو جمع کر سکتے ہیں

(۲۴۵) مساوات ح (۷) = کی قیمتوں کی منفی قوتوں کی مجموعہ کو دریافت کرو

لاکی جگہ ۱/۲ رکنوں اور اس میں ہونے والی مساوات میں فہمیتوں کی مثبت قوتوں کے مجبوند کو معلوم کرو

یاد دفعہ گذشتہ کی آخر نتیجہ میں م کو متواتر برابر بن - ۱ اورن - ۲ اورن - ۳ - کے

بناؤ تو اسی متواتر ص-۱ ص-۲ ص-۳ ... حاصل ہونگے

(۲۷۶) جملہ بالقرینہ ناطقہ کی قیمت دریافت کرنی کی سوال عالمہ کی صورت اس سوال کے صورت میں اس سوال کے جواب میں

کہ خاص مفرد جملوں کی قیمت دریافت کرو اور اب ہم اس کو ثابت کر دیں گی

کوئی جبلہ بالقرنیہ ناطقہ اگر صحیح نہ ہو تو وہ خارج سمیت ہوگا جو ایک جبلہ بالقرنیہ ناطقہ صحیح کو  
دوسرے جبلہ بالقرنیہ ناطقہ صحیح پر تقسیم کرنی سی پیدا ہوا ہو کہ کوئی سا جبلہ بالقرنیہ ناطقہ صحیح اگر تین

نہ ہوتو وہ دو یا زیادہ جملے بالقرینہ ناطقہ صحیحہ کا مجموعہ ہوگا پس اسی معلوم ہوا کہ فقط بحث متجانسہ جملوں ہی پر چاہی ایک جملہ متجانسہ مرکب مختلف احزاسی ہو سکتا ہی جس میں گو مجموعہ قوت یا دون کا ایک ہی رہی مگر وہ خود قوت نامختلف ہوں ایسی صورت میں جملہ متجانسہ مجموعہ دو یا زیادہ اون متجانسہ جملوں کا ہی جو متحدہ الدرجہ ہیں اور اون میں سب قوتوں میں ایک ہی قوت ناما ہے اسی معلوم ہوا کہ فقط اون ہی جملوں بالقرینہ ناطقہ متجانسہ برکرتی جا ہی جن میں تمام قوتوں میں قوت ناما ایک ہی ہیں

(۲۴۷) فرض کرو کہ ۱ د ب دس اور ۰۰ مساوات معلوم کی قیمتوں کو تعبیر کرتے ہیں بموجب دفعہ ۲۴۴ کے ہم امثال کے قوتوں میں قیمت

$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ + ۱۶ + ۱۷ + ۱۸ + ۱۹ + ۲۰ + ۲۱ + ۲۲ + ۲۳ + ۲۴ + ۲۵ + ۲۶ + ۲۷ + ۲۸ + ۲۹ + ۳۰ + ۳۱ + ۳۲ + ۳۳ + ۳۴ + ۳۵ + ۳۶ + ۳۷ + ۳۸ + ۳۹ + ۴۰ + ۴۱ + ۴۲ + ۴۳ + ۴۴ + ۴۵ + ۴۶ + ۴۷ + ۴۸ + ۴۹ + ۵۰ + ۵۱ + ۵۲ + ۵۳ + ۵۴ + ۵۵ + ۵۶ + ۵۷ + ۵۸ + ۵۹ + ۶۰ + ۶۱ + ۶۲ + ۶۳ + ۶۴ + ۶۵ + ۶۶ + ۶۷ + ۶۸ + ۶۹ + ۷۰ + ۷۱ + ۷۲ + ۷۳ + ۷۴ + ۷۵ + ۷۶ + ۷۷ + ۷۸ + ۷۹ + ۸۰ + ۸۱ + ۸۲ + ۸۳ + ۸۴ + ۸۵ + ۸۶ + ۸۷ + ۸۸ + ۸۹ + ۹۰ + ۹۱ + ۹۲ + ۹۳ + ۹۴ + ۹۵ + ۹۶ + ۹۷ + ۹۸ + ۹۹ + ۱۰۰$$

کی قیمت بیان کر سکتی ہیں اس جملہ کو اول رتبہ کا جملہ کہتے ہیں کیونکہ او کی ہر ایک رقم میں ایک قیمت ناما کی قیمتوں میں سے ہے

جب جملہ کی ہر رقم میں قیمتوں میں سی دودو ملحق ہوتو اسکو دوسرے رتبہ کا جملہ کہتے ہیں جیسی کہ جملہ

$$۱۰ + ۲۰ + ۳۰ + ۴۰ + ۵۰ + ۶۰ + ۷۰ + ۸۰ + ۹۰ + ۱۰۰ + ۱۱۰ + ۱۲۰ + ۱۳۰ + ۱۴۰ + ۱۵۰ + ۱۶۰ + ۱۷۰ + ۱۸۰ + ۱۹۰ + ۲۰۰ + ۲۱۰ + ۲۲۰ + ۲۳۰ + ۲۴۰ + ۲۵۰ + ۲۶۰ + ۲۷۰ + ۲۸۰ + ۲۹۰ + ۳۰۰ + ۳۱۰ + ۳۲۰ + ۳۳۰ + ۳۴۰ + ۳۵۰ + ۳۶۰ + ۳۷۰ + ۳۸۰ + ۳۹۰ + ۴۰۰ + ۴۱۰ + ۴۲۰ + ۴۳۰ + ۴۴۰ + ۴۵۰ + ۴۶۰ + ۴۷۰ + ۴۸۰ + ۴۹۰ + ۵۰۰ + ۵۱۰ + ۵۲۰ + ۵۳۰ + ۵۴۰ + ۵۵۰ + ۵۶۰ + ۵۷۰ + ۵۸۰ + ۵۹۰ + ۶۰۰ + ۶۱۰ + ۶۲۰ + ۶۳۰ + ۶۴۰ + ۶۵۰ + ۶۶۰ + ۶۷۰ + ۶۸۰ + ۶۹۰ + ۷۰۰ + ۷۱۰ + ۷۲۰ + ۷۳۰ + ۷۴۰ + ۷۵۰ + ۷۶۰ + ۷۷۰ + ۷۸۰ + ۷۹۰ + ۸۰۰ + ۸۱۰ + ۸۲۰ + ۸۳۰ + ۸۴۰ + ۸۵۰ + ۸۶۰ + ۸۷۰ + ۸۸۰ + ۸۹۰ + ۹۰۰ + ۹۱۰ + ۹۲۰ + ۹۳۰ + ۹۴۰ + ۹۵۰ + ۹۶۰ + ۹۷۰ + ۹۸۰ + ۹۹۰ + ۱۰۰۰$$

اب یہاں ترتیب قیمتوں میں سی دودو کی لگی ہی اور قوت تمام اول قیمت پر اور ع قوت نما دوسری قیمت پر رکھا گیا ہی اب اس جملہ کو ہم ج ۱۰ بجے سے تعبیر کریں گے کیونکہ وہ حاصل جمع ایسی قوتوں کا جیسی کہ رقم ۱۰ بجے ہی جب قیمتوں میں سی تین تین قیمتیں جرا میں ملحق ہوں تو اس جملہ کو تیسری رتبہ کا جملہ کہتے ہیں جیسی کہ ہم جملہ ہے

$$۱۰۰ + ۲۰۰ + ۳۰۰ + ۴۰۰ + ۵۰۰ + ۶۰۰ + ۷۰۰ + ۸۰۰ + ۹۰۰ + ۱۰۰۰ + ۱۱۰۰ + ۱۲۰۰ + ۱۳۰۰ + ۱۴۰۰ + ۱۵۰۰ + ۱۶۰۰ + ۱۷۰۰ + ۱۸۰۰ + ۱۹۰۰ + ۲۰۰۰ + ۲۱۰۰ + ۲۲۰۰ + ۲۳۰۰ + ۲۴۰۰ + ۲۵۰۰ + ۲۶۰۰ + ۲۷۰۰ + ۲۸۰۰ + ۲۹۰۰ + ۳۰۰۰ + ۳۱۰۰ + ۳۲۰۰ + ۳۳۰۰ + ۳۴۰۰ + ۳۵۰۰ + ۳۶۰۰ + ۳۷۰۰ + ۳۸۰۰ + ۳۹۰۰ + ۴۰۰۰ + ۴۱۰۰ + ۴۲۰۰ + ۴۳۰۰ + ۴۴۰۰ + ۴۵۰۰ + ۴۶۰۰ + ۴۷۰۰ + ۴۸۰۰ + ۴۹۰۰ + ۵۰۰۰ + ۵۱۰۰ + ۵۲۰۰ + ۵۳۰۰ + ۵۴۰۰ + ۵۵۰۰ + ۵۶۰۰ + ۵۷۰۰ + ۵۸۰۰ + ۵۹۰۰ + ۶۰۰۰ + ۶۱۰۰ + ۶۲۰۰ + ۶۳۰۰ + ۶۴۰۰ + ۶۵۰۰ + ۶۶۰۰ + ۶۷۰۰ + ۶۸۰۰ + ۶۹۰۰ + ۷۰۰۰ + ۷۱۰۰ + ۷۲۰۰ + ۷۳۰۰ + ۷۴۰۰ + ۷۵۰۰ + ۷۶۰۰ + ۷۷۰۰ + ۷۸۰۰ + ۷۹۰۰ + ۸۰۰۰ + ۸۱۰۰ + ۸۲۰۰ + ۸۳۰۰ + ۸۴۰۰ + ۸۵۰۰ + ۸۶۰۰ + ۸۷۰۰ + ۸۸۰۰ + ۸۹۰۰ + ۹۰۰۰ + ۹۱۰۰ + ۹۲۰۰ + ۹۳۰۰ + ۹۴۰۰ + ۹۵۰۰ + ۹۶۰۰ + ۹۷۰۰ + ۹۸۰۰ + ۹۹۰۰ + ۱۰۰۰۰$$

یہاں ترتیب قیمتوں میں سی تین تین کی ایک دفعہ لگی ہی اور م اول قیمت پر اور ع دوسرے قیمت پر اور ق تیسرے قیمت پر رکھا گیا ہی ہم اس جملہ کو ج ۱۰ ب ۱۰ بجے سے تعبیر کریں گے کیونکہ وہ حاصل جمع ایسی قوتوں کا ہے جیسی کہ ۱۰ ب ۱۰ بجے کا ہے

اور اس طرح سی چوتھی اور زیادہ رتبہ کی جملی ہم معزز کر سکتی ہیں اور اسی طریقہ سے ان کی کتابت کر سکتے ہیں  
چونکہ ہم نے پہلے بتا دیا ہے کہ ص م کی سطح جملہ کوشاں مساوات کی رقموں میں بیان کر سکتی ہیں  
تو صرف پہلے بتا دینا کافی ہو گا کہ ہم جن جملوں پر بحث کر رہے ہیں ان میں سی کوئی ایسی جملوں  
کی رقموں میں جیسی ص م کی سطح بیان ہو سکتا ہے

(۲۷۸) دوسرے رتبہ کی ج م جملہ بالقرینہ کی قیمت دریافت کرو

ہم کو معلوم ہے کہ ص م = ا + ب + س + ...

ص ع = ا ع + ب ع + س ع + ...

ضرب یعنی سی ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے کہ

ص م ص ع = ا + ا ع + ب + ب ع + س + س ع + ...

+ ا ب ع + ا س ع + ب س ع + ...

یعنی ص م ص ع = ص م ص ع + ج ا ب ع

اسی واسطی ج ا ب ع = ص م ص ع - ص م ص ع

اس میں م اور ن غیر مساوی فرض کی گئی ہیں اگر ہم ع کو برابر م کے فرض کریں تو

ج ا ب ع میں دو درجہ برابر ہو جائیں گی اور یہ حاصل جمع اس طرح بیان کیا جائیگا کہ

ج (۱ ب) ا اور اسی واسطی

ج (۱ ب) ا = ص م - ص م

(۲۷۹) تیسری رتبہ کی جملہ بالقرینہ ج ا ب ع س کی قیمت دریافت کرو

ہم کو معلوم ہے کہ ج ا ب ع = ا ب ع + ب س ع + ا س ع + ...

ص ق = ا ق + ب ق + س ق

ضرب یعنی سی ہم کو حاصل ہوتا ہے کہ

ص ق ج ا ب ع = ا ق + ب ق + س ق + ا ق + ب ق + س ق + ...











باب ستم  
۱۷۱  
استعمال بالغریزہ جملوں کا  
(۲۵۲) مساوات کی قیمتوں کی بالغریزہ جملوں کے مسئلہ کو ہم دو جگہ کام میں لائیں گی اول ایسی مساوات کی تائی ہیں  
جس کی قیمتیں مساوات مفروضہ کی قیمتوں کی تفاوت کا مجذور ہوں اور دوم ایک بڑا مسئلہ مساوات  
میں سی مجہول کی دور کرنے کا اوسی ثابت کرینگے

(۲۵۳) ایسی مساوات بناؤ کہ جس کی قیمتیں مساوات مفروضہ کی قیمتوں کے تفاوت کا مجذور ہوں  
فرض کرو کہ مساوات مفروضہ ان درجہ کی ہی اور اس کی قیمتیں  $a$  و  $b$  و  $c$  ہوں تو مساوات  
مطلوبہ کی قیمتیں  $(a-b)$  و  $(a-c)$  و  $(b-c)$  ہوں گیں اور ان کی  
تعداد برابر اس خباغ کی ہوگی جو ان چیزوں میں سی دود کا لیا جائے یعنی  $\frac{1}{2}(a-b)$  (ن-۱)  
ایسی واسطی یہ عدد مساوات مطلوبہ کی درجہ کو تعبیر کر لیا۔۔۔  $\frac{1}{2}(a-b)$  (ن-۱) کی جگہ م رکھو  
اور فرض کرو کہ مساوات مطلوبہ

$$a^2 + b^2 + c^2 + \dots = 0$$

سے تعبیر ہونی ہی اور  $a$  و  $b$  و  $c$  کی قیمتوں کی ردین قانون کا مجموعہ ہی پس ہم کو  $a$  و  $b$  و  $c$  سے  
کا صرف تحقیق کرنا ہی اور بعد اس تحقیق کرنی کی مثال مساوات مطلوبہ کے بموجب دفعہ ۲۴۴ کے  
ان صورت قانونیہ سی متواتر دریافت ہو جائینگے کہ  $a^2 + b^2 + c^2 + \dots = 0$   
اور علیٰ ہذا القیاس

$$\text{فرض کرو کہ } (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 + \dots = 0$$

پس  $a^2 + b^2 + c^2 + \dots = 0$  (ن-۱) +  $(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 + \dots = 0$   
اب فرض کرو کہ  $a$  و  $b$  و  $c$  مساوات مفروضہ کی قیمتوں کے قانون کے مجموعوں کو تعبیر کرنی ہیں  
مح  $(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 + \dots = 0$  (ن-۱) +  $\frac{(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 + \dots}{2 \times 1} + \dots = 0$  (ن-۲)  
لاکی جگہ متواتر  $a$  و  $b$  و  $c$  رکھو اور جمع کرو تو

$$a^2 + b^2 + c^2 + \dots = 0 \quad (ن-۲) + \frac{(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 + \dots}{2 \times 1} + \dots = 0 \quad (ن-۳)$$

بائیں طرف جو ارقام لکھے ہیں ان میں اول در آخر سی ارقام مساوی البعد اسپین برابر ہیں ایسی واسطی

اونکی ترتیب ثانی ہی اور ۲ پر تقسیم کرنے سے یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{ص} = \text{ق} \text{ ص} - ۲ \text{ ص} - ۲ \text{ ص} + ۱ - ۲ \text{ ص} + \frac{۲(۱-۲)}{۲} \text{ ص} + \frac{۱}{۲} \text{ ص} + \frac{۲(۱-۲)}{۲} \text{ ص} + \frac{۱}{۲} \text{ ص} + \frac{۲(۱-۲)}{۲} \text{ ص} + \frac{۱}{۲} \text{ ص}$$

اب ص اور ص ..... مساوات مفروضہ کی مثال کی قیوں میں بیان ہو سکتی ہیں پس ص معلوم ہو سکتا ہے

اور یہ اوتنی آخر کا مساوات مطلوبہ کی مثال دریافت ہو جائیگے

(۲۵۴) مساوات مطلوبہ کی آخر رقم جو ق م سی تعبیر کی گئی ہے اس کا حساب کیا در طریقہ سی بھی ہو سکتا ہے

فرض کرو کہ مساوات مفروضہ ح (لا) = پس

$$\text{ح (لا) = (لا - ۱) (ب - لا) (س - لا) \dots}$$

$$\text{پس ح (لا) = (لا - ۱) (ب - لا) (س - لا) \dots + \dots + \dots}$$

$$\text{ح (۱) = (۱ - ۱) (ب - ۱) (س - ۱) \dots}$$

$$\text{ح (ب) = (ب - ۱) (ب - ۱) (س - ۱) \dots}$$

اسی معلوم ہوا کہ ق م = ح (۵) ح (ب) ح (س) .....

اب فرض کرو کہ سہ و صہ و لہ ..... قیمتیں مساوات ح (لا) = کی ہو تو

$$\text{ح (لا) = ن (لا - صہ) (لا - لہ) (لر - لا) \dots}$$

$$\text{اسی واسطی ح (۱) ح (ب) ح (س) \dots}$$

$$\text{ن (۱ - صہ) (۱ - لہ) (۱ - لر) \dots (ب - صہ) (ب - لہ) (ب - لر) \dots (س - صہ) (س - لہ) (س - لر) \dots}$$

$$\text{لیکن (۱ - صہ) (ب - صہ) (س - صہ) \dots = (۱ - لہ) (ب - لہ) (س - لہ) \dots}$$

$$\text{(۱ - صہ) (ب - صہ) (س - صہ) \dots = (۱ - لہ) (ب - لہ) (س - لہ) \dots}$$

اور علی بنی القیاس

$$\text{پس ح (۵) ح (ب) ح (س) = ن (۱ - صہ) (۱ - لہ) (۱ - لر) \dots (ب - صہ) (ب - لہ) (ب - لر) \dots (س - صہ) (س - لہ) (س - لر) \dots}$$

$$\text{= ن (۱ - صہ) (ب - صہ) (س - صہ) \dots}$$

اسو اسطی (۱-ک) (۱-ن) = ۱

ابح (س) ح (ص) ح (لر) ... مساوات مستحق (لا) = کی قیمتوں کا جملہ

بالقرینہ ہی اور اسو اسطی اس کا حساب ہو سکتا ہے

(۲۵۵) ایک فائدہ ایسی مساوات کی دریافت کرنی کا کہ جسکی قیمتیں مساوات مفروضہ کی

قیمتوں کے تفاوت کا مجذور ہوں دفعہ ۱۰۴ میں ہم فی بیان کیا ہی کہ اوسی مساوات

مفروضہ کی قیمتوں کا مقام معلوم ہونا ہی مگر یہ مطلب تو سترم صاحب کی ضابطہ سی خوب

حاصل ہونا ہی ایک اور بات اسی مساوات سی کہ جسکی قیمتیں مساوات مفروضہ کی قیمتوں کے تفاوت کا

مجذور ہوں حاصل ہوتی ہی کہ اسکی قیمتوں کی دیگر مساوات مفروضہ کی خیالی قیمتوں کی تود معلوم ہو جائے

اسو اسطی کہ یہ امر ظاہر ہی کہ اس جدید مساوات کی منفی قیمتیں ہوں تو مساوات مفروضہ کی خیالی

قیمتیں ہوں گیں اور اگر مساوات جدید کی منفی قیمتیں نہ ہوں تو مساوات مفروضہ کی خیالی قیمتیں ہوں گیں

اگر مساوات جدید کی خیالی قیمتیں ہوں تو مساوات مفروضہ کی خیالی قیمتیں ہوں گیں اور اگر اسکی

کوئی خیالی قیمت نہ ہو تو مساوات مفروضہ کی بھی کوئی خیالی قیمت نہ ہوگی

مثلاً مساوات مفروضہ درجہ چارم کے قیمتیں = لریا اور = لویا ہوں

تو اس صورت میں مساوات جدید کی حقیقی منفی قیمتیں ہوں گیں

(۲۵۶) اگر دو مساواتوں میں دو مفادیر مجبول ہوں تو اب ہم یہ بتلائیگی کہ اونہیں سے

ایک مقدار مجبول قیمتوں کی بالقرینہ جملوں سی کسطح در کرتے ہیں

فرض کرد کہ مساواتیں یہ ہوں کہ

$$ع. لا + ع. لا^۱ + ع. لا^۲ + ... + ع. م =$$

$$ق. لا + ق. لا^۱ + ق. لا^۲ + ... + ق. ن =$$

مثال ع. د ع. د ع. د ... ق. د ق. د ق. د ... مقدار کے جملے نا طاقہ صحیح ہیں اور

لا کا دور کرنا منظور ہے

فرض کرو کہ ان مساوات میں سی اول مساوات سی لائی قیمتیں ارقام دین دریافت ہوئی ہیں اور  
دوب دس ۱۰۰ ان کو تعبیر کرتی ہیں ان کو دوسری مساوات میں مندرجہ کو تو ہم کو م مساوات میں  
د کے تحقیق کرنے کے واسطی حاصل ہو گئیں یعنی

$$ق. ۱ + ق. ۱ - ۱ + ق. ۲ - ۲ + ... + ق. ۱ =$$

$$ق. ۲ + ق. ۱ - ۱ + ق. ۲ - ۲ + ... + ق. ۱ =$$

$$ق. ۳ + ق. ۱ - ۱ + ق. ۲ - ۲ + ... + ق. ۱ =$$

پس تمام قیمتیں دکی جو قابل دخل ہونی کی ہیں وہ ان مساواتوں کی قیمتوں میں شامل ہیں  
اور بالعکس اسکی جو کوئی قیمت ان مساواتوں کی ہو وہ دکی قیمت قابل دخل ہونی کے ہے

اس واسطی کہ تمثیلاً فرض کرو کہ مساوات اول کی ایک قیمت صدی اور جب دین بجائی دکی صدی لکھا جائے  
تو دکی قیمت صدی ہونی ہی پس لا = صد اور د = صد اصل مساواتوں کی شرائط کو پورا کرینگے  
اس واسطی کہ یہ قیمتیں بظاہر دوسرے مساوات کی شرائط کو پورا کرتی ہیں اور مساوات اول کی  
شرائط لا = اسی پوری ہوتی ہیں خواہ کچھ ہی ہو پس اسلی جب ہم لا = اور دین د  
کو صد مقرر کریں تو یہی اول مساوات کی شرائط پوری ہو گئیں اسی بہتہ استخراج ہوتا ہے  
اگر اوپر کی مساواتوں کی دائیں طرف کی ارکان کو باہم ضرب دین اور حاصل ضرب کو  
برابر صفر کے لکھ دین تو ایک مساوات آخر کار دکی حاصل ہو جائیگی

مقادیر اور دس ۱۰۰ دین سی دو دو کو باہم تبادل سی بہتہ حاصل ضرب متبدل نہیں ہوگا  
اسلی ان مقدار کا وہ جملہ بالقرنیہ ہوگا اور اسلی اسکی قیمت مساوات اول کو شمال  
ع. د. د. ۱۰۰ کی رقموں میں بیان ہو سکتی ہی پس اس طرح آخر کو ایک مساوات  
ناطفہ صحیحہ کی حاصل ہو جائیگی اور اوس میں وہی سب قیمتیں دکی ہو گئیں جو دخل ہونے  
کی قابلیت رکھتی ہیں اور انکی سوا کوئی اور قیمت نہیں ہوگی

(۲۵۷) ایک خاص مثال فرض کرو کہ ایک مساوات معی ہی اور دوسرے مساوات درجہ دوم کی ہے





باب

استعمال افرنیہ جملوں کا

124

۱۲۹  
 فی ترکیب کی موافق لادور کیا تو رکن کی مساوات آخر کا اول رکن میں ایک سلسلہ ارقام کا ہوگا  
 جس میں سی ہر ایک رقم حاصل ضرب م اجزاء ضربی کا ہی دوسری صورت میں لکھ کر دیکھیں کہ  
 ہی اور جو تک ہم پہنچا سکتے ہیں کہ یہ سلسلہ ارقام کا جملہ بالفرض اول و بس ... کا ہی تو مجموعہ ارقام  
 مع قوت نایون کی جنکا ابھی ذکر کیا ہے یہ ہوگا کہ

ق ر ق م ق ط . . ح ا ن ر ب م ص ن ط

اب درجہ قرق ص ق ن ۔۔ کا اعلیٰ ر ص + ط + ۔۔ ہی نہیں ہی ثواب ہم کو صرف  
یہ ثابت کرنا کہ درجہ ج ن ر بن ص س ط ۔۔ کا بھران ر بن ص + ن ط + ۔۔

سی نہیں تو ایسی ہیہ استخراج ہوگا کہ حاصل ضرب کا درجہ اعلیٰ من سی نہیں ہی اب ہیہ نتیجہ مطلوب  
دشا ہون سی حاصل ہونا ہی اول فتحہ ۲۲۲ کے صورقا نویثہ سی ہیہ ثابت ہو سکتا ہے کہ

ص میں اعلیٰ قوتیں رکھنے کی بنیاد پر کی نہیں ملتی ہیں دوم دفعہ ۱۲۴۸ اور ۱۲۴۹ کے عملوں سے مستنبط ہوتا ہے کہ قیمت حج اگر بے سہرا . . . میں فوٹین اور حاصل ضرب

ص ۱ و ص ۲ و ص ۳ ... ص ۴ و ص ۵ و ص ۶ اور ہر رقم میں فرض کی حروف  
ماحت کا مجموعہ ۴ و ۵ و ۶ ... ہے

اسی ہم یہ نتیجہ نکالتی ہیں کہ آخر مساوات دسین کوئی قوت کی اعلیٰ دسین نہیں واقع ہوئی (۲۵۴) دفعہ گذشتہ کی آخر مساوات کی درجہ کی حد غائی معلوم ہوئی ہے کہ اوسے آگے

وہ نہیں بڑھتا لیکن وہ بعض صورتوں میں اس حد غائی سی جھوٹا ہوتا ہے

مسئلہ کی توسیع ہو سکتی ہے اور یہ نتیجہ عامہ اسی مستنبط ہوتا ہے کہ جتنی مساواتیں ہوں  
 اور جتنی اوتنی ہی مقدار میں مجبول ملے ہوں اور یہ تمام مقدار میں مجبولہ سوار ایک دو کیجائیں تو آخر  
 جو مساوات حاصل ہوگی اس کا درجہ اصل مساواتوں کی درجوں کی حاصل ضرب سے بڑا نہیں ہوگا

سرٹ کا جبر مقابلہ پڑھو  
اکیسواں باب قہمتوں کی قوتوں کے مجموعی

بالسبب وکیم

166

ابہم ایک اور ترکیب بیان کرنی چاہی کہ اگر اس پہلی ترکیب نہیں ہوگا شہر میں تو اس صحیح مفروضہ کا مجرب حال یہ ہے کہ

فرض کرو کہ ادب و س۔۔۔ مساوات (۱۱) = کی قیمتیں ہیں تو ہم کو یہ حاصل ہو گا کہ

ح (لا) = (لا - ا) (لا - ب) (لا - س) ... اور فرض کر دو مساوات ن درجہ کی ہے تو

$$\left(\frac{v}{u} - 1\right)\left(\frac{v}{u} - 1\right)\left(\frac{v}{u} - 1\right) = \frac{(v)^2}{u}$$

طرفین کی لوکارنم نو اور ایسی طرف کی لوکارنم کی صورت مفصلہ لکھو تو یہ حاصل ہوگا کہ

$$(\dots + س + ب + 1) \frac{1}{b} - = \frac{(n)}{2} \text{ لگ}$$
$$(\dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}) \frac{1}{n} -$$
$$(\dots + \text{ع} + \text{ج} + \text{ح}) \frac{1}{\text{ح}}$$

پس بائیں طرف مثال  $\frac{1}{10}$  کا۔ صدم ہی اسی معلوم ہوا کہ  $\frac{1}{10}$  = مثال  $\frac{1}{10}$  کے جو صورت مفصلہ

لوک (۱) میں اور یہ صورت مفصلہ قوائے متعارفہ لائیں کہہ گئی ہو۔

اس میں مثبت فرض کیا گیا ہے اگر قوائید تصدیق کا حاصل جمع دریافت کرنا منظور ہو تو لاکھ اسی ہزار

اور مساوات کی قیمتوں کی مثبت قواء کا مجموعہ اس مساوات میں دریافت کرو

(۳۶۱) تمثیلاً مساوات ۱-ع + ۲-ق = کی قیمتوں کی مفتوتوں کا مجموعہ دریافت کرو

پہنان ح (۱۱) =  $\left( \frac{11}{10} - \frac{6}{10} \right) - 1$  = لوک ح (۱۱) =  $\left( \frac{11}{10} - \frac{6}{10} \right) - 1$  = لوک

$$\dots + \left(\frac{q}{p} - \frac{e}{p}\right) \frac{1}{p} + \dots + \left(\frac{q}{p} - \frac{e}{p}\right) \frac{1}{p} + \left(\frac{q}{p} - \frac{e}{p}\right) \frac{1}{p} + \frac{q}{p} - \frac{e}{p} =$$

امثال کامل  $\frac{1}{100}$  کے۔ لوگ حج (۱۰) میں مختلف ارقام کے منتخب کرنی سی جنہیں لا واقع ہو

حاصل ہو سکتی ہیں ان ارقام کو اگر یہ ترتیب معکوس لکھیں تو

$$\dots + \frac{1}{r-2} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r-1} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{r} \right)$$





لا = ص سے معدوم ہوتا ہو

جب لا = ص تو ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے

$$(لا + ص) - لا - ص = ص \quad (1 + ص) - ص = 1 \quad (ص - ص) - ص = -ص$$

اور یہ معدوم ہوتا ہے جب ن طاق ہو اور پورا ۳ پر نہ تقسیم ہوتا ہو

اور نیز جب لا = ص

$$ن (لا + ص) - لا - ص = ص \quad (1 + ص) - ص = 1 \quad (ص - ص) - ص = -ص$$

یہ معدوم ہوتا ہی اگر ن - اجفت صحیح ہو اور ضعف ۳ کا ہو کیونکہ ص = ۱ اور ص = ۱

اور اگر ن - اجفت صحیح ہو اور ضعف ۳ کا ہو تو یہ استخراج ہوتا ہے کہ ن طاق صحیح ہے

اور ۳ پر تقسیم نہیں ہوتا پس (لا + ص) - لا - ص بھی معدوم ہوتا ہے اور یہی نتیجہ

حاصل ہو سکتا ہی اگر ص کو بجای لا کے رکھیں

(۲۶۵) اب آخر استعمال دفعہ ۲۶۲ کا یہی کہ ہم اس مسئلہ کو ثابت کریں فرض کو کہ پس

$$1 - \frac{ن - ۳}{(ن - ۳)(۴ - ن)} - \frac{(۵ - ن)}{(۵ - ن)(۴ - ن)} + \dots + \frac{(۱ - ن)}{(۱ - ن)(۲ - ن)} - \dots + \frac{(۱ - ن)}{(۱ - ن)(۲ - ن)} + \dots$$

کا حاصل جمع ص ہے تو

ص = ۱ اگر ن طاق مثبت صحیح پورا ۳ پر تقسیم ہوتا ہو

ص = ۰ اگر ن طاق مثبت صحیح پورا ۳ پر نہ تقسیم ہوتا ہو

ص = ۱ اگر ن جفت مثبت صحیح پورا ۳ پر تقسیم ہوتا ہو

ص = ۰ اگر ن جفت مثبت صحیح پورا ۳ پر نہ تقسیم ہوتا ہو

دفعہ ۲۶۱ میں لا کو بجای ق کی اور لا + کو بجای ع کی رکھو تو ص = لا + ص

پس اگر ن مثبت صحیح ہے

$$(لا + ص) - لا - ص = ص \quad (1 + ص) - ص = 1 \quad (ص - ص) - ص = -ص$$

$$1 - \frac{ن - ۳}{(ن - ۳)(۴ - ن)} - \frac{(۵ - ن)}{(۵ - ن)(۴ - ن)} + \dots + \frac{(۱ - ن)}{(۱ - ن)(۲ - ن)} - \dots$$

بابیت و یکم ۱۸۱

فرض کرو کہ اسے و صہ واحد کے تین جز کے کعب ہوں لا = سہ کی رکھو (۱) کی بائیں طرف کا رکن  
ہے ہو جا لگا کہ

$$\left[ \frac{ن(سہ+۱)ن}{۱} - \frac{ن-۳}{۲} سہ(۱+سہ) + \frac{ن-۵}{۳} سہ(۱+سہ) - \frac{ن-۷}{۴} سہ(۱+سہ) \right]$$

لیکن سہ صہ = ۱ اور سیواسطی صہ = سہ صہ = سہ اور سہ + صہ + ۱ =

پس - صہ = سہ + ۱ پس سہ = (۱+سہ) اسی معلوم ہوا کہ بائیں طرف کا رکن (۱) کا  
متبدل ہو کر یہ ہو گا کہ

$$\left[ \frac{ن(سہ+۱)ن}{۱} - \frac{ن-۳}{۲} سہ(۱+سہ) + \frac{ن-۵}{۳} سہ(۱+سہ) - \frac{ن-۷}{۴} سہ(۱+سہ) \right]$$

یعنی ن (- صہ) ن ص

اور نیز جب لا = سہ و تو دائیں طرف کا رکن مساوات کا یہ ہو جا لگا کہ

$$\left[ \frac{ن(سہ+۱)ن}{۱} - \frac{ن-۳}{۲} سہ(۱+سہ) + \frac{ن-۵}{۳} سہ(۱+سہ) - \frac{ن-۷}{۴} سہ(۱+سہ) \right]$$

سیواسطی (- صہ) ن - ۱ = ن (- صہ) ص (۲)

اگر ن طاق صحیح پورا ۳ پر تقسیم ہوتا ہی تو دائیں طرف کا رکن (۲) کا برابر ۳ کے موجب  
دفعہ ۲۴۲ کی ہی اور سیواسطی - ۳ = ن صہ ص = - ن ص سیواسطی ص = ۳  
اگر ن طاق صحیح ہی اور ۳ پر پورا نہیں تقسیم ہوتا ہی تو دائیں طرف کا رکن (۲) کا صفر ہے  
بموجب دفعہ ۲۴۲ کے ہے اور سیواسطی ص =

اگر ن جفت صحیح ہی اور ۳ پر پورا تقسیم ہوتا ہی تو دائیں طرف کا رکن (۲) کا - ۱ ہے  
اور بائیں طرف کا رکن ن ص ہی سیواسطی ص = - ۱

اگر ن جفت صحیح ہی اور ۳ پر پورا نہیں تقسیم ہوتا ہی تو دائیں طرف کا رکن صہ - سہ - ۱ ہے

یعنی صہ کیونکہ سہ + صہ + ۱ = پس ۲ صہ = ن صہ ص اور سیواسطی ص = ۲

اس بات پر یہ خیال کرنا چاہی کہ سلسلہ جو صی تغییر ہوتا ہی اوسمین محدود تعداد رقموں کی ہے  
اور فی حقیقت اگر ن = ۲ م یا ۲ م + ۱ کے ہو تو اربعین سلسلہ میں ہونگین







اب بموجب دفعہ ۲۴۴ و ۲۴۵ کے عمل کرنے سے ہم کو نتائج مفصلہ ذیل حاصل ہونگے

(۱) اگر حقیقی قیمتیں ہیں تو  $\frac{لوم}{۱+لوم}$  کو خاطر خواہ م کی زیادہ کرنے سے تعداد اُدوسب سے بڑی قیمتوں کے حاصل ضرب کے قریب لاسکتی ہیں

(۲) اگر حقیقی قیمتیں تعداد بڑی کسی خیالی قیمت کی قالب سی ہی تو  $\frac{لوم}{۱+لوم}$  کی صدغائی ہوگی یعنی ان قیمتوں میں سی سب سی بڑی دو قیمتوں کا حاصل ضرب

(۳) اگر تعداد ا سب سی دو بڑی قیمتوں کی حاصل ضرب کی جذری خیالی قیمتوں کا قالب بڑا ہے تو  $\frac{لوم}{۱+لوم}$  کی صدغائی کی قیمت ہوگی یعنی مجذور اوس قالب کا ہوگا یعنی حاصل ضرب اوس خیالی قیمتوں کے حاصل ضرب کا جنکا وہ قالب تھا

(۴) پس صرف ایک صورت جس میں  $\frac{لوم}{۱+لوم}$  اسی صدغائی کی نہ ہونی کا نقص عاید ہوتا ہے یہ ہے کہ ایک طرف حقیقی قیمت ہو اور خیالی قیمتوں کی سب سے بڑی قالب سے تعداد بڑی ہو اس صورت میں حقیقی قیمت موافق دفعہ ۲۴۵ کے دریافت ہو جاتی ہے

(۲۵۰) بعض صورتوں میں اسی ترکیب کے متماثل ترکیب سی حاصل جمع ہونے والی قیمتوں کا ذرا کٹنا

ص م ص م ۱+ ص م ۲+ اور ص م ۳+ کی قیمتوں سی ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے کہ

ص م ص م ۲+ ص م ۱+ ص م ۲+ = (ا+ب) (ا-ب) + (ا+س) (ا-س) + (ب-ا) (ب+ا) + (ب+س) (ب-س) + ...

اب اسکو ہم سی تعبیر کرو پس موم کی معنی تو دفعہ گذشتہ میں مقرر ہو گئی ہیں اب ہم یہاں یہ دیکھنا چاہتے ہیں کہ مجموعہ کی ایک صدغائی اوس صورتوں میں ہی جنکا ذکر اوپر کی دفعہ میں ہوا اور یہ صدغائی مجموعہ تعداد ا سب سی بڑی دو قیمتوں کا ہی یا مجموعہ دو خیالی قیمتوں کا ہی جنکا قالب سب سے بڑا ہے

(۲۵۱) پس دفعہ ۲۴۴ کی (۱) و (۲) و (۳) صورتوں میں حاصل ضرب دو قیمتوں کا بموجب دفعہ ۲۴۴ کی اور انکا مجموعہ بموجب دفعہ ۲۵۰ کے حاصل ہو سکتا ہے اور (۱) اور (۲) کی صورتوں میں بموجب دفعہ ۲۵۰ کی دو قیمتوں کا مجموعہ معلوم ہو سکتا ہے

اور دفعہ ۲۶۶ کے اوٹین سی بڑی قیمت معلوم ہو سکتی ہے

(۲۶۶) مثال  $لا^۴ + لا^۳ + لا^۲ - لا^۱ - ۱ = ۰$

یہاں تفصیل فی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں

ارقام ص ۱ و ص ۲ کے واسطے

- ۱ - ۷ - ۲۳ - ۳ - ۱۱۴ - ۲۲۷ - ۲۰۲ - ۱۵۷ - ۱ - ۰ - ۰ - ۰ - ۰

ارقام ل۱ و ل۲ کے واسطے

- ۷۲ - ۵۰۸ - ۵ - ۲۴۷۷ - ۱۳۷۱ - ۱۷۱ - ۷۷۱ - ۷۷۱ - ۳۹۷۷ - ۰ - ۰ - ۰

اور ارقام م۱ و م۲ کے واسطے

۱۴۷ - ۸۸۱ - ۳ - ۷۸۷ - ۲۶۷ - ۲۵۷ - ۱۳۷ - ۳۸۲ - ۰ - ۰ - ۰ - ۰

اب یہاں سلسلہ ص ۱ و ص ۲ میں ایک رقم کو ماقبل کی رقم پر تقسیم کرنی سی ایک محدود خاندان

نہیں حاصل ہوتی سی ہم کو یہ قطعی معلوم ہوتا ہی کہ مساوات کی خیالی قیمتیں ہیں اور سلسلہ

ل۱ و ل۲ کو اپنی قبل کی رقم پر تقسیم کرنی سی وہ خارج قسمت حاصل ہوتی ہیں جنسی معلوم ہوتا ہے

کہ دو قیمتوں کی حاصل ضرب کو قدر ۵۳۰ ہی اور سلسلہ م۱ و م۲ کی ہر ایک رقم

سلسلہ ل۱ و ل۲ کی ہر ایک رقم فضا پر تقسیم کرنے سی وہ خارج قسمت حاصل ہوتی ہیں

جنسی معلوم ہوتا ہی کہ مجموعہ ان دو قیمتوں کا - ۱۵۸۱۹ ہے

پس ان دو قیمتوں سی ہم دو خیالی قیمتیں تقریباً دریافت کر سکتی ہیں

اور چونکہ مساوات کی لئی چاروں قیمتوں کا مجموعہ - ۱۵۸۱۹ ہی اور اسکا حاصل ضرب ہی تو مجموعہ

باقی دو قیمتوں کا وغیرہ ۸۱۹ ہی اور اسکا حاصل ضرب وغیرہ ۳۰۷ ہی اس واسطے بہ

دو قیمتیں بھی خیالی ہیں

پس اس طرح ہم کو یہ معلوم ہو گا کہ خیالی قیمتوں کے اول زوج کا قالب پانچ گنہ دوسرے خیالی قیمتوں

کے زوج کی قالب سی ہی سی معلوم ہوا کہ بموجب طریقہ کتابت دفعہ ۲۷۰ کے ہم کو درپیش

دریافت ہوگا کہ  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$  اب اور ارقام کو چھوڑ دین تو غلطی بقدر  $\frac{1}{2}$  حصہ کل کی قریب واقع ہوگی اور اسی ہم اپنی نتیجہ کی صحت کا اندازہ کر سکتی ہیں مثلاً ہم فی اوپر قیمتیں 100 کی لوہ اور لوہ تک لکھی ہیں تو حاصل ضرب کے دریافت کرنے میں غلطی قریب  $(\frac{1}{2})$  دین حصہ کل کے واقع ہوگی

بابیو ان بابیو سکر نامقادیر محمول کا یعنی سقاط

(۲۷۳) فرض کرو کہ دو ہزار ساوا تین دو مجہول کی ہم کو حل کرنی ہیں بعض صورتیں ایسی ہوتی ہیں کہ جن میں ان کا حل کرنا نہایت سہاں ہوتا ہے فرض کرو کہ ۱۱ اور ۱۵ مقدار مجہول کو تعبیر کرتی ہیں پس اگر ایک ساوات میں ۱۱ ملحق ہو اور کوئی اور قوت لاکہ نہ ملحق ہو تو اس ساوات سے ۱۱ لاکہ قیمت دے کی قیمتوں میں دریافت کریں اور او کو دوسری ساوات میں منہج کر کے تو ایک ساوات حاصل ہو جائیگی جس میں فقط مقدار مجہول ہے ملحق ہوگی اور او کی قیمتیں تقریبی یا تحقیقی اور ترکیبوں سے دریافت ہونگی جو او پر بیان ہوئیں

اب نیز فرض کرو کہ مساویتن ۱ = ب = سی تعبیر ہوتی ہیں اور ۱ اور ب  
جلد سی اجزائی میں تجلیم ہو سکتی ہیں مثلاً فرض کرو کہ ۱ = لکھ لکھ لکھ اور ب = موصو  
نومعادات مفروضہ کی تمام حل ان ہزار ہا داتوں کے حل کرنی سی حاصل ہوگی کہ لکھ = موصو = د  
لکھ = اور موصو = لکھ = اور موصو = لکھ = اور موصو = لکھ = اور

صَوّ = اور لُوّ = اور صو = اور لُؤْ = اور صوّ = پس حل معادلات مفروضہ

کالوں معا دلات کی حل بر مو فوف ہوا جو معادلات مفردہ سے درجہ کم رکھتی ہیں  
 یہ ہو سکتا ہے کہ ایک اجزا و ضربی میں ہر ایک ب کی اجزا و ضربی میں ہر ایک ب کے ساتھ بالکل مطابق ہو  
 مثلاً فرض کرو کہ لو اور صو مطابق ہیں تو کو کوئی قسمی متین لا اور کی جواسات لو = کی شرائط کو  
 پورا کرنے کے وہ ہیرا و مساوان ل = اور ب = کی شرائط کو بھی پورا کر سکتے  
 ہیں اگر لو میں لا اور دو ملتف ہیں تو ہم مقادیر جموں میں سے ایک کو وسط جو قیمت حاصل

مقرر کرن اور دوسر قیمت اسکی مطابق نکال لین اور اسطرح سی جتنی حل جاہن دریافت کرن  
گر لوہن ایک مقدار مجموع مقنا دیر مجموعہ میں سی ملے ہو تو ہم معادلات

۱ = ۱۰ اور ۲ = ۰ کی شرائط کو پورا اور مقدار مجموع کے اوس قیمت سی کر سکتی ہیں  
جو مساوات ۱۰ = ۰ سی مستط ہو اور دوسری مقدار مجموع کی واسطی خواہ کچھ ہی قیمت مقرر کرن

(۲۷۴) ہم فی ایہی بیان کہاں کہ دو مقدار مجموع کی مساواتوں کی کس طرح مسائل جملہ بالفرض کے  
استعانت سی ہم ایک مجموع مقدار کو دور کرنی میں اور ایک مساوات دوسر مقدار مجموع کی حاصل  
کرتی میں اب ہم مقدار مجموع کی دور کرنی کی ایک اور ترکیب بیان کرتی ہیں وہ دو جریہ جملوں کے

دفع اعظم دریا کرنی کی عمل پر موقوف ہی

(۲۷۵) فرض کرو کہ دو مقدار مساواتین ج (لاور) = ۰ اور ج (لاور) = ۰

سو تعبیر کی جائیں اور لا = ۰ اور ۲ = ۰ کی سی قیمتیں ہوں کہ اونسی مساوات کی شرائط پوری ہوتی ہوں  
تو مساوات ج (لاور) = ۰ اور ج (لاور) = ۰ کی شرائط لا = ۰ سی پوری ہونگی  
اسی معلوم ہوا کہ ج (لاور) و ج (لاور) کا ایک دفع مشترک ہو اور یہ دفع مشترک  
ایسا ہو کہ جب اسکو برابر صفی لکھیں تو اوس قیمتیں سے کی ماہر لگ جائیں اور نیز وہ  
قیمت یا قیمتیں حاصل ہو جائیں جو ۲ = ۰ کی ساتھ شریک ہو کر معادلات مفروضہ کی

شرائط کو پورا کریں

پس فرض کرو کہ ج (لاور) اور ج (لاور) کی لاکھ قوا متنازلہ کی ترتیب سی لکھیں  
اور حسب معمول اسکا دفع اعظم دریافت کرن اور یہاں تک عمل کرن کہ آخر کو ایک جملہ کا  
باقی میں حاصل ہو اسکا ج (۲) نام کہو تو کوئی ایسی قیمت کی داخل ہوتی قابل نہیں ہوگی جب تک کہ

ج (۲) = ۰ کی نہ کری اسواسطی کہ اگر ج (۲) معدوم نہ ہو تو ج (لاور) و ج (لاور) کا کوئی دفع مشترک نہیں ہونی کا واسطی وہ ایک ہی وقت معدوم نہیں ہونگے۔ مگر اگر  
بالعکس درست نہیں کہ ہر ایک قیمت و ج (۲) کو فنا کرتا ہی وہ ضرور داخل ہونی کی قابل ہے

اسو اسطی کہ اثنا عمل میں یہ واقع ہو سکتا ہی کہ بعض قواد کی مثال مکتور ہوں جنکی نسبت بالون  
میں و ملتف ہو اور ایک قیمت جو مساوات ج (د) = کی شرائط کو پورا کرتی ہو ان نسبت نالون  
کو معدوم کردی اور اسطرح سی لا انتہا اور غیر لمعین بمقادیر داخل کردی  
مثلاً فرض کرو کہ ہم کو یہ حاصل ہے کہ

$$ج (لا د) = ق ج (لا د) + ح (د)$$

بس اگر ق ایک جملہ صحیحی تودہ کی کسی محدود قیمت سی غیر متناہی ہوگا اور کوئی قیمت د کی جو  
ج (د) کو معدوم کرے وہ اوس لا کی قیمت کی ساتھ شامل ہو کر مساوات ج (لا د) =  
سی موافق اس کی قیمت کی نکلتی ہی ج (لا د) کو معدوم کر لی لیکن اگر ق کسر ہو  
اور اوسکی نسبت متناہی و ملتف ہو تو جب ج (د) معدوم ہو تو ق غیر متناہی ہو سکتا ہے  
اور کچھ ضرور نہیں کہ ج (لا د) معدوم ہو جب ج (د) = ۱۰ اور ج (لا د) = ۰ یہ صورتی  
اوس حالت میں ہی ہو سکتی ہی کہ ہم عمل حسب دستور کریں اور ایسی جزاء ضربی داخل کریں کہ مثال  
مکتوری ج جائیں مثلاً فرض کرو کہ ہم ج (لا د) کو کسی مقدار س میں ضرب دیتے ہیں تاکہ ہم اون  
امثال مکتوری ج جائیں جو د کے جملے میں اور اب ہم فرض کرتے ہیں کہ  
س ج (لا د) = ق ج (لا د) + ح (د)

اب اگر کو مساوات ج (د) = سی دریافت کریں اور ہر مساوات ج (لا د) = ۰ سے  
دریافت کریں تو جو قیمت اسطرح حاصل ہو نکلن وہ ضرور س ج (لا د) کو معدوم کرینگے  
مگر ہی یہ نہیں نکلتا کہ ج (لا د) معدوم ہوتا، کیونکہ یہ ہو سکتا ہی کہ جو قیمت د کی ہم نے  
لی وہ س کو معدوم کرے

اس سی معلوم ہوا کہ ایک قاعدہ کی ضرورت ہی جی یہ معلوم ہو کہ کون سی اصل مساواتوں میں  
داخل ہونی کی قابل ہیں اب ہم اوس قاعدہ کو بتلاتی ہیں - ہم یہ فرض کرتی ہیں کہ دفعہ  
اعظم کی دریافت کرتی ہیں حسب دستور اس باب میں احتیاط کی گئی ہی کہ امثال مکتورہ واقع ہوں

ہم یہ فرض کر سکتے ہیں کہ  $a + b = 1$  اور  $a = 1$ ۔ تعبیر کرتے ہیں  
 اوسمین نہ ۱ اور نہ ۱ میں کوئی جز فی ای واقع ہی کہ وہ صرف وہی کا جملہ ہو  
 کیونکہ ایسا جملہ کا ہم جدا گانہ خیال کر سکتے ہیں اور جو حل اوس پر موقوف ہوں وہ دریا کر سکتے ہیں  
 جو ترکیب ہم اب لکھتے ہیں وہ لابیٹی صبا اور سارر صبا فی ایجا کی تھی او کو میر  
 جو کوٹ کے جبر مقابلہ سی نقل کرتی ہیں

(۲۷) فرض کرو کہ دو ہمزاد  $a + b = 1$  اور  $b = 1$ ۔ سی تعبیر ہوتی ہیں اور یہ  
 بھی ہم فرض کرتے ہیں کہ نہ ایسا ہی نہ ب ایسی ہی کہ اوسمین کوئی جز فی ایسا واقع ہو کہ وہ  
 صرف و کا جملہ ہو اور  $a + b = 1$  میں اسلی ضرب دیتی ہیں کہ وہ ب تقسیم ہو  
 فرض کرو کہ  $a + b = 1$  خارج قسمت نکلتا ہی اور  $a + b = 1$  باقی بچتی ہی جسین رجملہ صرت و کا ہی فرض کرو کہ  
 $a + b = 1$  میں اسلی ضرب دیتی ہیں کہ وہ  $a + b = 1$  تقسیم ہو فرض کرو کہ  $a + b = 1$  تقسیم  
 کرنی میں  $a + b = 1$  خارج قسمت نکلتا ہی اور  $a + b = 1$  باقی بچتی ہی اور  $a + b = 1$  صرت و کا جملہ ہے  
 اسی طرح عمل کی جاؤ اور مثلاً فرض کرو کہ چوتھی تقسیم پر ہم کو ایسا ہی باقی حاصل ہوتی ہے کہ  
 جسین لا داخل نہیں ہی اور او کو ہم  $a + b = 1$  سی تعبیر کرتے ہیں پس متطابق ذیل ہم کو حاصل ہونگے

$$\left[ \begin{array}{l} a + b = 1 \\ a + b = 1 \\ a + b = 1 \\ a + b = 1 \end{array} \right. \quad (1)$$

فرض کرو کہ  $a + b = 1$  و  $a + b = 1$  و  $a + b = 1$  و  $a + b = 1$  اور  $a + b = 1$  کا ہے اور  
 $a + b = 1$  و  $a + b = 1$  و  $a + b = 1$  و  $a + b = 1$  اور  $a + b = 1$  کا ہے  
 اب ہم یہ ثابت کرینگے کہ معادلات  $a + b = 1$  اور  $a = 1$  کے حل ان نظموں کے  
 حل کرنے سے حاصل ہونگے

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} = 0 \text{ اور } 0 = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} = 0 \text{ اور } 0 = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} = 0 \text{ اور } 0 = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} = 0 \text{ اور } 0 = \frac{1}{5} \end{array} \right\} \dots \dots (2)$$

اول ہی ہم یہ ثابت کرتی ہیں کہ تمام حل جو معادلات (۲) سے حاصل ہونگی اونسے معادلات ۱ = ۰ اور ۰ = ۱ کی شرائط پوری ہونگیں اور دویم ہم یہ ثابت کریں گے کہ تمام قیمتیں جو لا اور کی معادلات ۱ = ۰ اور ۰ = ۱ کی شرائط کو پورا کرتی ہیں وہ نظم (۲) کے حلوں میں داخل ہونگیں

اول مطابق (۱) کے دو نو ارکان کو دو پر تقسیم کرو تو

$$\frac{1}{2} = 1 \text{ اور } \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad (3)$$

اب بموجب فرض کی سہ اور دو تو جملہ صحیحہ کی ہیں پس  $\frac{1}{2}$  بھی جملہ صحیحہ ہوا لیکن بموجب فرض کی ب کا کوئی جز ضربی البسا نہیں ہے کہ وہ فقط ہی کا جملہ ہو سوئی کو دو پر تقسیم کرتا ہے

مطابق (۳) سے ثابت ہوتا ہے کہ لا اور کی قیمتیں جو معادلات ۱ = ۰ اور ۰ = ۱ کی شرائط کو پورا کرتی ہیں وہ سہ اور کو معدوم کرتے ہیں لیکن  $\frac{1}{2}$  اور  $\frac{1}{2}$  بموجب فرض کے کوئی جز ضربی رکھتی نہیں اسلی یہ قیمتیں کو ہی معدوم کرتی ہیں پس ہی معلوم ہوا کہ معادلات ۱ = ۰ اور ۰ = ۱ کی تمام حل معادلات ۱ = ۰ اور ۰ = ۱ کی شرائط کو پورا کرتے ہیں

اب پہر مطابق (۳) کی دو ارکان کو سہ میں ضرب دو اور مطابق (۱) کے دوسرے مساوات سے سہ اور کا مساوی بہ حال ہوا و سکوس اور کی جگہ رکھی تو

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ اور } \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

جملہ سہ اور ایک صحیح جملہ ہی ہوا اسلی کہ را اور قی پوری تقسیم دیر ہوتی ہیں اور علاوہ بریں یہ جملہ دیر پوری تقسیم ہوتا ہی ہوا اسلی کہ سہ اور کو تقسیم کرتا ہے



اور اس کو اپورا نہیں تقسیم کرتا ہی دم پر تقسیم کرو اور اختصاراً بجای فی

م اور  $\frac{س + ا + ن + ق}{د}$  کے م رکھو تو بہ حاصل ہوگا کہ

$$(v) \quad \frac{1}{12}m + \frac{1}{12}m = 1 \frac{10}{12}$$

اب (۱) کے مطابق جن میں دوسرے کی دونوں ارکان کو سچ میں ضرب دو تو

$$\frac{س}{س} \frac{ا}{ا} = \frac{س}{س} \frac{ق}{ق} \frac{ا}{ا} + \frac{س}{س} \frac{ا}{ا} \frac{س}{س}$$

چونکہ تقسیم  $\frac{S}{S}$  اور  $\frac{S}{S}$  کو کرنا ہی تو وہ  $\frac{S}{S}$  رکوبھی تقسیم کر لیا لیکن  $\frac{S}{S}$  پر  
دہرین تقسیم ہوتا ہی اس واسطی  $\frac{S}{S}$  پر تقسیم ہونا چاہی دہر تقسیم کو اور مختصراً  $\frac{S}{S}$  کی جگہ  
ن اور  $\frac{S}{S}$  کے جگہ ن رکھو تو یہ حاصل ہو گا کہ

$$(5) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$$

(۴) اور (۵) منطبقوں سی ہیہ ثابت ہو کہ تمام قیمتیں جولا اور کی دلا اور کو

معلوم کرتی ہیں وہ  $\frac{1}{10}$  اور  $\frac{1}{10}$  ب کو فنا کرتی ہیں لیکن  $\frac{1}{10}$  اور  $\frac{1}{10}$  میں کوئی  
جز خربہ مشترک نہیں اسلئے تمام معادلات  $\frac{1}{10} = 10$  اور  $10 = 10$  اور  $10 = 10$   
کی شرائط کو پورا کرتے ہیں

ابن مطاہ (۴) کی دونوں ارکان کو سہ مین ضرب دو اور سہ کی جگہ اسکا ساوی لم

جو (۱) کے مطابق مین سی تیسری مطابق سی حاصل ہو (۱) مین کم تو

$$r_1^2 + r_2^2 + \left( \frac{r_1 r_2}{d} + q \right) = 1$$

موجب فرض کی دہ اول رکن کو اس متعلقہ کے تقسیم کرتا ہے اور وہی تقسیم کرتا ہے اس واسطی (ن م م) +  $\frac{س م}{در}$  (م) پورا دہ یہ تقسیم ہوگا اس خارج قسمت کو م سے بقیہ کرتو

$$(4) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 1$$

اب متعلقہ (۵) کے دو نوار کا کوس میں ضرب دو اور سام کی جگہ اوسکا

مساوی نہ جو (۱) کے مطابق مین بیسری سی نکلے درج کرو تو

$$\frac{س س اس ۲}{د د د} = \frac{س ۲ ن ۱}{د د د} + \frac{س ۲ ن ۱}{د د د} + \frac{س ۲ ن ۱}{د د د}$$

موافق سابق کی ہم ثابت کر سکتی ہیں کہ ۱ کے مثال پوری ۲ تقسیم ہوتی ہیں اور اس خارجہ کو  
فی سی بے کر تے ہیں تو ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{س س اس ۲}{د د د} = \frac{س ۲ ن ۱}{د د د} + \frac{س ۲ ن ۱}{د د د} + \frac{س ۲ ن ۱}{د د د} \quad (۴)$$

اب (۴) (۴) کے مطابق ہوتا ہے کہ تمام قیمتیں لا اور کی جو ۲ اور ۲ کو معدوم

کرتی ہیں وہ ان مطابق ہوتا ہے کہ اول رکن کو بھی معدوم کرتی ہیں لیکن  $\frac{س س اس ۲}{د د د}$  اور  $\frac{س ۲}{د د د}$

کا کوئی جزو رہی نہیں ہی اور اس کے تمام حل معادلات  $\frac{س ۲}{د د د} = ۱۰$  اور  $\frac{س ۲}{د د د} = ۰$  کی شرائط کو

پورا کرتی ہیں وہ معادلات  $\frac{س ۲}{د د د} = ۱۰$  اور  $\frac{س ۲}{د د د} = ۰$  کی شرائط کو بھی پورا کرتی ہیں

اب سب طرح موافق سابق کی (۴) اور (۴) کے مطابق کو س میں ضرب دینی ہیں

س ۲ کی جگہ اس کا مساوی نہ جو (۱) کے مطابق مین جو ہتی سی نکلے درج کرتی ہیں تو

یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{س س اس ۲}{د د د} = \frac{س ۲ ن ۱}{د د د} + \frac{س ۲ ن ۱}{د د د} + \frac{س ۲ ن ۱}{د د د} \quad (۸)$$

$$\frac{س س اس ۲}{د د د} = \frac{س ۲ ن ۱}{د د د} + \frac{س ۲ ن ۱}{د د د} + \frac{س ۲ ن ۱}{د د د} \quad (۹)$$

اس میں ۲ اور ۲ جمعی صحیح لا اور کے ہیں اب مطابق (۸) اور (۸) سی ثابت ہوتا ہے

کہ تمام حل معادلات  $\frac{س ۲}{د د د} = ۱۰$  اور  $\frac{س ۲}{د د د} = ۰$  معادلات  $\frac{س ۲}{د د د} = ۱۰$  اور  $\frac{س ۲}{د د د} = ۰$  کی شرائط پر

اب ہم نے اپنی دعویٰ کا اول جزو ثابت کر دیا یعنی تمام حل جو نظم معادلات (۲) سی حاصل ہوئے ہیں

وہ معادلات  $\frac{س ۲}{د د د} = ۱۰$  اور  $\frac{س ۲}{د د د} = ۰$  کی شرائط کو پورا کرتے ہیں

اب ہم کو یہ ثابت کرنا ہے کہ تمام قیمتیں جو معادلات  $\frac{س ۲}{د د د} = ۱۰$  اور  $\frac{س ۲}{د د د} = ۰$  کی شرائط کو

پورا کرتی ہیں وہ نظم (۲) کے جملوں میں موجود ہوتی ہیں مطابق (۳) کو اس طرح لکھ سکتی ہیں کہ

$$ن - ۱ - م ب = \frac{س ۲}{د د د} \quad (۱۰)$$

(۴) کو ب میں اور (۵) کو ا میں ضرب دو اور تقریق کرو تو

$$(م ب - ن ا) ر + (م ب - ن ا) س = ۰$$

اور اسے واسطی بموجب (۱۰) کے

$$(م ا - ن ا) ر - \frac{ر س}{د د} ر = ۰$$

اور اسے واسطی

$$م ا - ن ا = \frac{ر س}{د د} ر \quad (۱۱)$$

(۶) کو ب میں اور (۷) کو ا میں ضرب دو اور تقریق کرو تو

$$(م ب - ن ا) ر + (م ب - ن ا) د = ۰$$

اور اسے واسطی بموجب (۱۱) کے

$$(م ب - ن ا) ر + \frac{ر د}{د د} ر = ۰$$

$$م ب - ن ا = - \frac{ر د}{د د} ر \quad (۱۲)$$

اور علیٰ ہذا القیاس (۸) اور (۹) سے ہم یہ مستنبط کرتے ہیں کہ

$$م ب - ن ا = \frac{ر د ر ا}{د د د س} \quad (۱۳)$$

مطلقاً (۱۴) بتلا راسی کہ تمام قیمتیں لا اور لکھو اور ب کو معدوم کرتے ہیں وہ

$$\frac{ر د ر ا}{د د د س} = ۰$$

اور  $\frac{ر د}{د د} = ۰$  میں ضرور ایک معدوم ہوگا اسی معلوم ہوا کہ معادلات

$$\frac{ر}{د} = ۰ \text{ اور } \frac{ا}{د} = ۰ \text{ اور } \frac{س}{د} = ۰$$

سے تمام قیمتیں د کی جو داخل ہونی کی قابل ہیں انصرام پاتے ہیں

پس فرض کرو کہ لا = سہ اور د = صہ قیمتیں ہیں جو معادلات  $\frac{ا}{د} = ۰$  اور  $\frac{ب}{د} = ۰$

کی شرائط کو پورا کرتی ہیں

ادل فرض کرو کہ صہ ایک قیمت مساوی  $\frac{ا}{د} = ۰$  کی ہی تو بہینہ ظاہر ہے کہ قیمتیں لا = سہ









حاصل ہوتا ہے پس

$$۱ = ۵۷ + ۲۳ + ۲ - (۴ + ۳ + ۲) - ۱۱$$

اب تقسیم دوم کرنی کے واسطی مقسوم کو زمین اور تقسیم کے اول مرحلہ کے بعد پھر زمین ضرب دینا کہ تقسیم جاری رہی باقی ۱۱ کے واسطی ۸ (۲ + ۳ + ۲) (۵ - ۱۱) حاصل ہوگا اب ۲ کو لا - ۲ پر تقسیم کرو تو خارج قیمت ۵۷ + ۲۳ + ۲ ہوگا اور اب کوئی باقی نہیں ہے پس معادلات مفروضہ کی حل (۱) مساوی واحد لا - ۵ = ۰ سی جو بی شمار قیمتیں لا اور کی حاصل ہوتی ہیں اور بی شمار ہیں (۲) اور ان محدود حلوں پر شامل ہیں جو ان معادلات کی حل کرنے سے حاصل ہوتی ہیں کہ

$$۲ + ۳ + ۲ = ۱۰ \text{ اور } ۵۷ + ۲۳ + ۲ = ۰$$

سوم دفعہ ۲۷۴ کا ثبوت فرض کرنا ہی کہ لا اور محدود ہیں مگر یہ ممکن ہے کہ ایک مساوات کی حل بی شمار ہوں مثلاً فرض کرو کہ (۱ - ۵) لا - ۲ - ۱۱ + ۲ = ۰ پس جب تک کہ ۵ برابر واحد کے نہ ہو تو اس مساوات درجہ دوم سی و محدود قیمتیں انصرام باقی ہیں اگر نہایت قیمتیں آئی ہوتا تو ایک قیمت لا کی نہایت زیادہ ہوتی ہی بائیسواں باب جبر مقابلہ کا دیکھو

پس جب ۵ = ۱ تو ہم کہتے ہیں کہ لا کی لاہتا قیمتیں ہیں

ہم فی دفعہ ۲۷۴ کی تحقیقات میں ایسی لا اور کی غیر محدود قیمتیں نہیں فرض کی ہیں اور پر علیہ بحث ہو سکتی ہی مثلاً اگر ہم یہ تحقیق کرنا چاہیں کہ لا کی ایک قیمت غیر محدود داخل ہونی کی قابل ہی تو ہم  $\frac{۱}{۱۱}$  بجای لا کی رکھیں اور مساوات کو کسری خالص کریں اور فرض کریں کہ لا = ۰ تو اب ہم کو دو مساواتیں کی حاصل ہوں گیں اور اگر ان کی ایک قیمت یا کئی قیمتیں مشترک ہوں گیں تو اس قیمت یا ان قیمتوں کو مع غیر محدود قیمت لا کے

معادلات مفروضہ کی شرائط کا پورا کرنی والا

تیسواں باب ایک جملہ کا سلسلہ میں پھر



(۲۷۴) فرض کرو کہ ایک مساوات ایسی ہی کہ دس میں دو مقدار مجموعی لا اور مخلوط میں پس اگر ہم مساوات کو حل کر کے قیمتیں کی لا کی قیمتوں میں دریافت کر سکیں تو وہی ایک قیمت کو سلسلہ قوا، لا میں معلوم کر سکیں گی اور اب ہم وہی قیمتوں کی پہلا فی کی ایک ترکیب لکھتی ہیں اور اسی پہلی کی قیمتیں محدود قیمتوں میں نہیں دریافت کر سکیں گی

اس ترکیب کو لا اگر انٹرنی ایجاد کیا ہوتا تو ٹن حصہ کا جو متوازی الاضلاع مشہور ہے اس میں ہی اس عمل کا بیان ہوا ہی جس کسی کو اس مسئلہ کا مفصل حال دریافت کرنا ہو کہ وہ کس طرح ایجاد ہوا اور کیسے ایجاد کیا تو وہ پروفیسر ڈی مورگن صاحب کی تحریر کو اس باب میں دیکھیں

(۲۸۰) فرض کرو کہ مساوات

$$1x + 2y + 3z + \dots + k + \dots + v = 0$$

تعبیر ہوتی ہے اس میں  $1x$  ...  $k$  ...  $v$  تمام جملی لا کے ہیں اور ہم فرض کرتی ہیں کہ یہ حصہ ... کہ ... بہ ترتیب تنازلی مقدار جبریر کی لکھی ہوئی ہیں اور تمام تخفیفات جہاں ختم ہوا بہت بڑا یا چھوٹا یا بہت چھوٹا مقدار کو لکھا ہے وہاں افونکی معنی جبریر لئے ہیں

فرض کرو کہ  $1$  درجہ کا یعنی  $1x$  کوئی بڑی قوت لا کی  $1$  میں نہیں واقع ہوتی

اور  $2$  درجہ کا ہی ...  $k$  درجہ کا اور ...  $v$  درجہ کا

بالفعل ہمارا بڑا مطلب یہ ہے کہ دفعہ ذیل کے مسئلہ کو حل کریں

(۲۸۱) مطلب ہمارا ہی کہ وہ سب طریقے دریافت کریں جسکی موافق قیمت ط کی ایسی دریافت کریں

کہ سلسلہ ارقام ذیل میں دو یا زیادہ رقمیں برابر یا بڑی باقی قیمتوں میں کسی ایک رقم کسی اور

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + \dots + v = 0$$

اول تو فرض کرو کہ  $1$  صحتی تو اول رقم باقی ارقام میں سے ہر ایک سے بڑی ہوگی

اور جب ط گھٹتی ہے تو ہر ایک رقم گھٹتی ہی لیکن ہر ایک نسبت اپنی باقی کے رقم زیادہ

اہستہ کم ہوتی ہی فرض کرو کہ ط کی وہ قیمت ہی کہ  $ا + س + ط$  اول برابر ارقام مابعد میں سی  
ایک یا کی ایک برابر ہوا دوسرے قیمت سطح حاصل ہوگی کہ معادلات ذیل میں سی ط کی سب سے  
بڑی قیمت دریافت کریں

$$ا + س + ط = ب + ص + د + ا + س + ط = س + ل + ط \dots ا + س + ط = ک + د + ط = م + ص + ط$$

یعنی بڑی قیمت ط کی اس سلک ذیل سے دریافت ہوگی کہ

$$\frac{ا - س}{س - د} \dots \frac{ا - ک}{ک - د} \dots \frac{ا - ل}{ل - د} \dots \frac{ا - م}{م - د} \dots \frac{ا - ص}{ص - د}$$

فرض کرو کہ  $\frac{ا - ک}{ک - د}$  ان قیمتوں میں سب سے بڑی قیمت ہی اگر ایک بڑی دوسری سی ہے  
یا اگر کئی ایک برابر اور بڑی باقی میں سی بہ نسبت کسی کے ہو تو  $\frac{ا - ک}{ک - د}$  کو انہیں  
آخر فرض کرو اور  $\frac{ا - د}{د - ک}$  کو مر سے تعبیر کرو

فرض کرو کہ ط کم مری ہو تا جائی بہاننگ کہ  $ک + د$  اول برابر ایک یا کئی ایک کے  
ارقام مابعد میں سی ہو سی قیمت ط کی موافق سابق کی معادلات ذیل میں ط کی سب سے بڑی قیمت  
یعنی سے دریافت ہو سکتی ہے

$$ک + د = ل + ل + ط و ک + د = م + ل + ط \dots ک + د = م + ص + ط$$

یعنی سب سے بڑی قیمت اس سلک میں سی یعنی چاہی کہ

$$\frac{ل - ک}{ک - د} \dots \frac{م - ک}{ک - د} \dots \frac{ص - ک}{ک - د}$$

فرض کرو لا انہیں سی سب سے بڑی قیمت منتخب کی جاے اگر ایک بڑی بہ نسبت کسی اور کی ہو یا کئی  
ایک بڑی بہ نسبت اور دن کی ہو ان میں سے سب سے آخر رقم منتخب کیجائی فرض کرو کہ رقم  
اس منتخب رقم کی ہی جو  $\frac{ل - ک}{ک - د}$  فرض کیجائی  
فرض کرو کہ ط پر کم مری ہوئی جہاں اور موافق سابق کی عمل کر کے مرقوم معادلات ذیل سے دریافت کریں

$$ن + س + ط = ع + د + ط \dots ن + س + ط = م + ص + ط$$

پہلی جاری رہی جب تک کہ رقم م + ص قیمت ط کی دریافت کرنے کے لئے کام آئی





پس جب لا انتہایت ہو بہر مثال معدوم ہونی چاہی اور اسی بہر حاصل ہوتا ہے

$$۰ = ۳ + ۲ - ۵$$

اب بہر ظاہری کہ  $۱ = ۱$  ایک حل ہی اور جملہ مشتق  $۲$  تو  $۲ - ۵$  ہی معدوم ہوتا، جب  $۱ = ۳$  تو قیمت ایک اتی ہے

تو  $۲ - ۵ = ۳ + ۲ - ۵$  پر تقسیم کرو تو خارج قسمت  $۲ + ۲ + ۳$  حاصل ہوگا پس اور قیمتیں لو کی مساوات  $۲ + ۲ + ۳ = ۰$  سے حاصل ہونگین اور وہ

$۳ - ۸ = ۳$  ہیں پس اب بہر نتیجہ نکالتی ہیں کہ مساوات مفروضہ سی دو حقیقی قیمتیں کی ارقام میں حاصل ہونگین اور لا اول رقم ان قیمتوں میں سی ہر ایک قیمت میں اوٹ ہوگی کہ وہ لاکھ فواد متنازلہ کے سلسلہ میں بیان کیجائی

اب ہم لا  $(۱ + ۲)$  کو، کی جگہ مساوات مفروضہ میں رکھو اور لو کی قیمتوں کو دیا کرو بالفعل ہی مثال کو دوبارہ فرض کریں گے

(۲۸۸) دفعات ۱۲۸۱ اور ۲۸۲ میں نتائج ذیل حاصل ہوتے ہیں

(۱) اگر  $۱ + ۲$  سے دب + صہ ... ک + کد ص + قد سب برابر ہوں تو مقادیر مرد و مر ... سب برابر واحد کے ہونگے

(۲) اگر مقادیر  $۱ + ۲$  سے دب + صہ ... ک + کد ص + قد

میں سی دو یا زیادہ برابر ہوں اور بڑی بہ نسبت کل باقی ارقام کی ہوں تو واحد سلک مرد و مر ... میں واقع ہوگا اس واسطی ظاہری کہ  $۱ = ۱$  ایک مناسب قیمت تحقیقات ۲۸۱ میں ہی کیونکہ بہر قیمت دو یا زیادہ ارقام کو برابر اور بڑی بہ نسبت باقی ارقام کے بناتی ہے

جبر یہ خط و منحنی کی خطوط مستقیمہ متمنع الملاقات کا ضابطہ ان دو نتائج میں ملتا ہے باقی ارقام میں ہم سے و صہ و ل ... سب کو صحیح فرض کرتی ہیں اور نہ کو صفر

(۳) دفعہ ۲۸۲ میں اول مساوات لو کی سہ۔ کد قیمتیں رکھتی ہیں اور دوسری مساوات کی کد۔ سد قیمتیں اور علی بنہ لقیاس میں الجمل ہم کو یہ قیمتیں کی اول رقم کی دریافت ہوتی ہیں اور یہی ہونا چاہیے تھا اسلئے کہ مساوات کی سہ درجہ کی ہے (۴) فرض کرو کہ تمام جملی لا کی کس سے تک برابر ہیں اور اعلیٰ درجہ کی بہ نسبت اور ان کے بین تو کی قیمتوں میں سہ۔ کد قیمتیں ہوں گیں جو لا کی مثبت قوت سے شروع ہوتی ہیں اور کد۔ سہ قیمتیں ہوں گیں جو صفر قوت سے لا کی شروع ہوتی ہیں اور قیمتیں جو منفی قیمتوں سے شروع ہوتی ہیں اسو اسطی کہ کد۔ سد قیمتیں کی ہیں جو لا کی صفر قوت سے شروع ہو کر صعود کرتی ہیں اس سبب کہ بموجب فرض کی قیمت ط = ۰، تمام ارقام ذیل

کد + کد دل + لوط ۰۰۰ ن + سد ط کو برابر اور بڑا کسی قسمی جو اون کی اگی ایسی بناتی ہے سہ۔ کد قیمتیں کی جو لا کی مثبت قیمتوں سے شروع ہو کر صعود کرتی ہیں اور اس صعود کا سبب مثبت قیمتیں ط کی اور اون کی موافق قیمتیں تو کی ہیں جو قوت نمایاں سہ و صد۔۔۔ کد کے تعلق سے حاصل ہوتی ہیں اور سد قیمتیں کی لا کی منفی قوتوں سے شروع ہوتی ہیں اور صعود کرتی ہیں اور یہ صعود ط کی منفی قیمتوں سے اور اون کی موافق تو کی قیمتوں سے جو قوت نمایاں سہ۔۔۔ قدری حاصل ہوتی ہیں ہوتا ہے اور آئین قدر۔

(۵) دل و ۰۰۰ ص تمام متحدہ الدرہ ہیں اور م اعلیٰ درجہ بہ نسبت بالقی کے رکھتا ہے سہ۔ لب قیمتیں کی ہیں جن میں اعلیٰ قوت لا کی مثبت قوت نما  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$  ہے اور کی لب قیمتیں ہیں جن میں علی قوت لا کا منفی قوت نما  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$  ہے (۲۸۵) دفعہ ۲۸۲ میں جب مساوات لو کی حاصل ہوتی ہیں اور اسی کی قیمتوں کے دوسرے رقم کی دریافت کرتی ہیں اس سبب ایک بات ہم کہتی ہیں فرض کرو کہ  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  (لو + ل) آئین لو اور ط معلوم ہیں اس کی قیمت کو سادہ مفروضہ میں مندرجہ کو اسطرح سادہ مفروضہ کے درجہ کی مساوات حاصل ہوگی اکثر لو کی قیمتوں میں بعض داخل ہونی کی قابل ہوں گیں اسطرح کہ جو فیض کے کو معدوم ہوتا ہی جب لا لا نہایت ہو

پس وہ قیمتیں دکی جو لاکھ قیمت سے شروع ہوتی ہیں یا لاکھ صفر قیمت سے  
اونکو مسترد کرنا چاہی یہ لاکھ کی مستقیمتیں دکی اور قیمتوں سے متعلق ہونگے جسے  
کہ بالفعل ہم کو کچھ تعلق نہیں ہے کیونکہ اس وقت صرف ہم باتو وہ خاص قیمت دکی تلاش کر  
رہے ہیں جو لاکھ سے شروع ہوتی ہیں یا خاص قیمتوں دکی تلاش کر رہے ہیں جو اس طرح شروع ہوتی ہیں۔

اور ایک سے زیادہ ہیں اور جنہیں لیا اور ط کی معلوم قیمتیں ہیں

(۲۸۶) دفعہ ۲۸۲ کی مثال کو دوبارہ لاکھ لاکھ (لو + ٹو) اور لو = ۱

کے فرض کرو تو لاکھ تقسیم کرنے کے بعد یہ نتیجہ حاصل ہوگا

$$\text{ٹو} (۰۰۰) + \text{ٹو} (۰۰۰) + \text{ٹو} (۰۰۰) - \text{ٹو} (۰۰۰) - \text{ٹو} (۰۰۰) = ۰$$

یہاں لاکھ کی مثال میں علی قوتیں لاکھ بیان کر دیں اب دفعہ ۲۸۲ کی کسور سے پہلے جملہ ہوتا ہے

$$\frac{۵-۴}{۱-۴} \text{ د } \frac{۵-۴}{۱-۴} \text{ د } \frac{۵-۴}{۱-۴} \text{ د } \frac{۵-۴}{۱-۴}$$

یہاں اول دو قیمتیں صفر میں اور چہرہ مقابلہ کی اعتبار سے بڑی نسبت اور دیکھیں لیکن  
صفر قیمت مسترد ہونی چاہی جسکا بیان دفعہ بالا میں کیا گیا اس واسطے دفعہ ۲۸۱ کی طرح

پہر ہم عمل کریں اور فرض کریں کہ مر = ۰۔ اب ہم کو مر دریافت کرنا ہی

اس واسطے یہ کہہ کر بنائی جائیگی

$$\frac{۵-۴}{۱-۴} \text{ د } \frac{۴-۵}{۱-۴}$$

انہیں سے دوسری - پہلی اور چہرہ مقابلہ کے لحاظ سے بڑی ہے پس اس کے موافق ہم لو = ۰ لاکھ

اور مساوات ۴ لو - ۲ = ۰ سے قیمت لاکھ دریافت کرتی ہیں پس لو = ۳۸

پس اول رقم لاکھ ۳۸ یا ۳۸ - ۱ = ۳۷ اس واسطے چنانکہ ہم فی عمل کیا ہے

$$۵ = ۳۸ (۱ + \frac{۱}{۳۸}) + ۰ (۰ + \frac{۱}{۳۸}) - ۱ (۱ - \frac{۱}{۳۸}) + ۰$$

(۲۸۶) لاکھ قیمتوں کی صفت مساوات عامہ لاکھ بناوٹ کی امتحان سے معلوم ہو سکتی ہے

اول فرض کرو کہ بجائی دکی لاکھ کہیں اور یہ لاکھ کو لو + دوسری تبدیل کریں جب ہم دکی جملہ لاکھ

رکھیں تو دائیں طرف کا رکن مساوات یہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{صر } ۱ \text{ (لو) } ۱ + \text{صر } ۲ \text{ (لو) } ۲ + \text{صر } ۳ \text{ (لو) } ۳ + \dots$$

اس میں  $n$  اور  $n-۱$  دونوں سے... مقدار کی لحاظ سے بہتر ترتیب تیار ملی ہیں اس جملہ کو سر (لو) توجہ ہو  
تو مساوات کو کی یہ ہوگی کہ سر (لو + ۱) = مساوات مفروضہ میں  $n$  کی قوت نہایت

فرض کی بنیاد مساوات کو میں اس طرح لکھی جائیگی کہ

$$\text{سر } ۱ + \text{سر } ۲ + \text{سر } ۳ + \dots + \text{سر } n + \text{سر } n-۱ =$$

اس میں سر  $n$  کو بجای  $n$  سے سر (لو) کے رکھا ہی اور اسی طرح کے معنی سر  $n-۱$  سے سر  $n-۱$

کے ہیں اب اگر کوئی خاص قیمت کو کی نہ مقرر کیا ہی تو مثال اکثر فوائد کو کے اوپر  
کی مساوات میں جملہ  $n$  کی ہوگی اور سب ایک درجہ کی ہیں یعنی  $n$  درجہ کے پس بموجب

دفعہ ۲۸۴ کی  $n$  کی قیمتیں لاکھ صفر قوت سے شروع ہونگی لیکن اگر  $n$  لاکھ ہو کہ

صر (لو) = توجہ سر کا  $n$  درجہ کا بہ نسبت جملہ سر کے ہو مگر اسی معلوم ہو کہ  $n$  کی قیمتیں

سی ایک قیمت لاکھ منفی قوت سے شروع ہوتی یعنی  $n-۱$  اور یہی قیمت  $n$  کی ہی جیسی

ہم تلاش کر رہے تھے چونکہ صر (لو) = مساوات ہی جیسی  $n$  کی قیمت موافق اپنی عمل کے ہم

دریافت کر لیں گی لیکن اگر مساوات صر (لو) = کی قیمتیں برابر ہوں تو  $n$  کی ایک سی زیادہ

مناسب قیمتیں ہم کو حاصل ہونگی مثلاً فرض کرو کہ خاص قیمتیں جو ہم نے منتخب کی تھیں دو چار دفعہ

واقع ہوتی ہی تو لاکھ  $n$  درجہ کا سر ہوگا اور  $n$  درجہ کی سر  $n-۱$  درجہ کا سر ہوگا

اسی بموجب دفعہ ۲۸۴ کے معلوم ہوتا ہے کہ  $n$  کی چار مناسب قیمتیں ہونگی ہر ایک لاکھ شروع

ہوگی جس میں لاکھ صفر منفی قوت -  $n-۱$  سے شروع ہوگا

ہم نے یہاں یہ فرض کیا ہے کہ صر (لو) اور اس کی مشتق جملہ کی اوس قیمت سے جس پر بحث ہو رہی ہے

معدوم نہیں ہوا

(۲۸۸) جو یکجہ ہم نے اوپر لکھا ہے اوس میں یہ تحقیق کیا ہے کہ  $n$  کی قیمتیں لاکھ فوائد متنازلہ میں بنائے جاتے ہیں





کی کوئی خیالی قیمت نہیں ہوتی اگر یہ ممکن ہو تو فرض کرو کہ  $ع + ق = م$  ایک قیمت ہی تو  
 $ع - ق = م$  بھی دوسری قیمت ہوگی اب ان قیمتوں کو متواتر مساوات بجای لا کے

$$\text{لکھو اور حاصل اس میں تفریق کرو تو یہ حاصل ہوگا کہ}$$

$$ق = \left[ \frac{ع - (ع - م)}{2} + \frac{ع - (ع - م)}{2} + \frac{ع - (ع - م)}{2} + \dots + \frac{ع - (ع - م)}{2} \right]$$

اور یہ ناممکن ہی اگر  $ق = ۰$  کے نہ ہو

یا اس مسئلہ کو اس طرح ثابت کرو کہ مساوات مفروضہ کی دائیں طرف کی رکن کو  $م$  (لا) ہی تعبیر کرو  
 اور فرض کرو کہ  $ا$  و  $ب$  دس۔۔۔ کے مفاد پر جریہ بہ ترتیب تصاعدی ہیں جب لاکچہ ہی بڑا  
 بہ نسبت  $ا$  کے ہو تو  $م$  (لا) کی اول رقم بہت بڑی ہوگی اور مثبت ہوگی اور لاکھی لاکھی ساتھ  
 قربت کافیہ فرض کر کی ہم  $م$  (لا) کا قیمت قطعی حاصل کر سکتی ہیں اور جب لاکچہ ہی کم ہی ہو  
 تو دوسرے رقم  $م$  (لا) کی بہت بڑی ہوگی اور منفی ہوگی اور لاکھی  $ب$  کے ساتھ قربت کافیہ  
 فرض کر کی ہم  $م$  (لا) کی منفی قیمت حاصل کر سکتی ہیں پس لاکھی  $ا$  اور  $ب$  کے

درمیان بعض قیمت کے مقرر کرنی ہی  $م$  (لا) کے علامت بدلتا ہی اور سی طرح  $ب$  اور  $س$  کے  
 درمیان لاکھی بعض قیمت  $م$  (لا) کی علامت بدلتی ہے اور علیٰ ہذا القیاس اس طرح ہم  
 ثابت کر سکتی ہیں کہ مساوات  $م$  (لا) = کی سب قیمتیں حقیقی اور غیر متساوی ہیں

مساوات  $م$  (لا) = کی جو صورت ہی اسی بہت آسان مساوات کی خاصیت جس کا اوپر  
 بیان ہوا آسانی ہی ثابت ہو سکتی ہی ظاہر ہی کہ اگر مساوات کو کسور سی خالص کر کے  
 اصلی گینڈی کی صورت میں مساوات کو بدل لین تو کچھ ہماری نتیجہ نکالتی پر اثر نہیں ہوگا  
 یعنی اگر بجای مساوات  $م$  (لا) = کی یہ مساوات بنالین کہ

$$م (لا) (ا - ب) (ب - ج) (ج - د) \dots (ن - ک) = ۰$$

تو کچھ نتیجہ میں فرق نہیں ایگا اور ثبوت ظاہر ہو جائیگا

(۲۴۰) ان مفاد پر  $ا$  و  $لام$  و  $لام$ ۔۔۔ لان کی قیمتیں ان مساواتوں سے دریافت کرو



$$ک_۲ - ۱ = \frac{۱}{۱} + \frac{۲}{۲} + \frac{۳}{۳} + \frac{۴}{۴} + \dots = ۱$$

$$ک_۳ - ۱ = \frac{۱}{۱} + \frac{۲}{۲} + \frac{۳}{۳} + \frac{۴}{۴} + \dots = ۱$$

ان مقادیر کو ایک ایک کن کو اس مساوات واحد

$$ک_۳ - ۱ = \frac{۱}{۱} + \frac{۲}{۲} + \frac{۳}{۳} + \frac{۴}{۴} + \dots = ۱$$

کی قیمتیں خیال کر سکتی ہیں اور ہم مساوات بلحاظ ک کن درجہ کی ہی فرض کرو کہ  $۱ = ۱ - ط$

تو اسی بہتہ استخراج ہوگا کہ ط میں جو مساوات ذیل بیان ہوئی ہے اس کی قیمتیں

$$۱ - ک_۱، ۱ - ک_۲، ۱ - ک_۳، \dots$$

$$۱ + \frac{۱}{ط} + \frac{۲}{ط} + \frac{۳}{ط} + \frac{۴}{ط} + \dots = ۱$$

نسب نمایوں کی حاصل ضرب میں مساوات کو ضرب دی کر اس کی یہ صورت بناؤ کہ

$$ط^۱ + ۱ ط^۱ + ۱ ط^۲ + \dots + ۱ ک_۱ = ۰$$

اس میں رقم جو ط سی بی تعلق ہی یعنی  $۱ ک_۱$  وہ لا (ب - ۱) (س - ۱) ہے

اسی واسطی بموجب دفعہ ۴۵ کے

$$(۱ - ک_۱) (۱ - ک_۲) (۱ - ک_۳) \dots = (۱ - ۱ ک_۱) لا (ب - ۱) (س - ۱) \dots$$

$$یعنی لا = \frac{(۱ - ک_۱) (۱ - ک_۲) (۱ - ک_۳) \dots}{(۱ - ۱ ک_۱)}$$

اس جملی ہی قیمتیں اور سی بی کی حروف  $۱$  و  $ب$  و  $س$  کی قرینہ کے ساتھ

تبدل کر کے نکل سکتی ہیں

(۲۹۲) ان مقادیر  $س$  و  $۱$  و  $۳$  و  $۴$  میں مقادیر کو ایک ایک فو ایک ضرب دیں تو

ان حوالہ ضرب کا مجموعہ ثابت کرو کہ یہ ہے کہ

$$\frac{(س - ۱) (س - ۱) (س - ۱) \dots (س - ۱) (س - ۱) (س - ۱) \dots}{(س - ۱) (س - ۱) (س - ۱) \dots (س - ۱) (س - ۱) (س - ۱) \dots}$$

فرض کرو کہ

$$(۱ + س) (۱ + س) \dots (۱ + س) = (۱ + س) (۱ + س) \dots (۱ + س) (۱ + س) \dots (۱ + س) \dots$$



ہم صحیح کو دو حضور میں جدا جدا کرتی ہیں ایک وہ جسکی ہر رقم میں واقع ہوتا ہے اور  
دوسرا وہ حصہ ہی جس میں انہیں واقع ہوتا تو ہم پہلی حصہ کو اس طرح لکھ سکتی ہیں کہ  
(ص ن) - ج (ص ن) + ج (ص ن) - ج (ص ن) + ... + (۱ - ص ن) - ۱  
اور دوسرے حصہ کو

- ج (ص ن) + ج (ص ن) - ج (ص ن) + ... + (۱ - ص ن) - ج (ص ن)  
اس میں ج سی وہ خاص مقدار تعبیر ہوتی ہیں جو پہلی ج کی ماتحت تہیں اور ج سے  
باقی ارقام تعبیر ہوتی ہیں اب فرض کرو کہ ۱ = ۰ تو صحیح معدوم ہوتا ہی کیونکہ اس صورت میں

$$(ص ن) - ج (ص ن) = ۰$$

$$ج (ص ن) - ج (ص ن) = ۰$$

$$ج (ص ن) - ج (ص ن) = ۰$$

اور اس طرح ہم ثابت کر سکتی کہ جب ۱ = ۰ اور ۰ = ۰ کے تو صحیح معدوم ہوتا ہی  
اور علیٰ ہذا القیاس بس ہم یہ نتیجہ نکالتی ہیں کہ صحیح اکثر مقدار اور ب ۰۰ میں  
ہر ایک پر تقسیم ہوتا ہی اور اس بواسطی او کی حاصل ضرب پر لیکن حاصل ضرب ن درجی کا ہی  
اور اس بواسطی اگر صحیح ن درجی ہی کم ہو تو وہ از روی تطابق کی صفر ہوگا اور صحیح درجی کا  
تو اسی بہ نسبت ہوتا ہی کہ جب ر کم بہ نسبت ن درجی کی ہو تو صحیح معدوم ہوتا ہے  
اور جب ر کم ن سے نہ ہو تو وہ پورا ۱ ب ۰۰ پر تقسیم ہوتا ہے

جب ر = ن تو صحیح = ۱ ب ۰۰ کی حاصل ہوگا اس میں لرو کی عددی مقدار ہے  
اسکو تشخیص کرنا چاہی اب لرو کے تشخیص کرنی کی واسطی فرض کرو کہ ۱ ب ۰۰ میں  
ہر ایک برابر واحد کے ہے تو صحیح یہ ہو جائیگا کہ

$$۱ - ۱ + ۱ - ۱ + ۱ - ۱ + \dots + (۱ - ۱) + ۱ - ۱ + \dots$$

یعنی ۱۔ بموجب جبر مقابلہ کے انسا لیسوین باب کے

دوم فرض کرو کہ  $n = ۱ + ۱$  و  $n$  پورا  $a$  ب  $s$  پر تقسیم ہوگا اور چونکہ  $n$   $۱ +$  درجہ کا ہی تو اسکا ایک جز ضربی ایک درجہ کا ہو جو بلحاظ  $a$  و  $b$  و  $s$  ... ایک قرینہ رکھتا ہوگا اسواسطی یہی جز ضربی  $a + b + s$  ہوگا اسی معلوم ہوا کہ صحیح = لب  $a$  ب  $s$  ...  $(a + b + s)$  ... اسین لب کو ی عددی مقدار ہی اسکا تشخیص کرنا چاہی البی کی تشخیص کرنی کی واسطی فرض کرو کہ  $a$  و  $b$  و  $s$  ... وغیرہ میں ہر ایک برابر واحد کے ہے تو

صحیح =  $n + ۱ - (n - ۱) + ۱ + \frac{n(n - ۱)}{2 \times 1} - (n - ۱) + ۱ - \dots$   
اور یہ برابر لب  $n$  کے اسی معلوم ہوا کہ موافق باب ۳۴ باب جبر مقابلہ کے لب =  $\frac{n + ۱}{2}$   
(۲۹۴) فرض کرو کہ  $[s]$  تعبیر  $s$  (۱ -  $s$ ) (۲ -  $s$ ) ... (۱ +  $s$ ) کو کرنا ہے اور  $s$  خواہ کچھ ہی ہو تو

$[a + b] = [a] + [b] + \frac{n(n - ۱)}{2 \times 1} - [a] - [b] + \dots + [b]$   
اسواسطی کہ فرض کرو مثبت صحیح مقدار ہی تو یہ ہم کو معلوم ہی کہ یہ مسئلہ صحیح ہی خواہ ب کی کوئی مثبت صحیح قیمت ہو کیونکہ  $(a + ۱) + (b + ۱) + \dots + (a + ۱) + (b + ۱) + \dots$  میں مثال لائے مساوات سی یہ نتیجہ استخراج ہوتا ہی پس اسی معلوم ہوا کہ ب کی قیمتوں سی زیادہ قیمتوں کی واسطی یہی مسئلہ از روی تطابق کے بموجب دفعہ ۳۴ کے صحیح ہی یعنی جب  $a$  کوئی مثبت صحیح مقدار ہی تو ب کی تمام قیمتوں کی صورتیں مسئلہ صحیح ہے اور چونکہ کوئی مثبت صحیح کے واسطی مسئلہ صحیح ہی تو وہ  $a$  کی قیمتوں سی زیادہ قیمتوں کی واسطی صحیح ہی اور سیواسطی بموجب دفعہ ۳۴ کے وہ  $a$  کی تمام قیمتوں کے واسطی صحیح ہی غرض یہ سلسلہ اس طرح صحیح ثابت ہوتا ہی کہ ضابطہ جملہ ثنائی کو مثبت صحیح قوت نام کی صورت میں فرض کر لین اور بہر دفعہ ۳۴ کی ضابطہ کو یہی صحیح مان لین اس مسئلہ کا نام کہی جائے گا کہ وہ بھی لیا جاتا ہی جب فولر کا ضابطہ ثنائی اس حالت میں ثابت کرتے ہیں کہ قوت نما

کچھ ہی ہو تو اس مسئلہ کا وہاں کام پڑتا ہی اور یہ بات مشہور ہی اور وہاں اس مسئلہ کو موافق اصول مستقل صورتسا دیہ کے قائم کیا ہے

(۲۴۵) فرض کرو کہ مساوات  $x = 1$  کی ایک قیمت  $x$  ہی تو ہم فرض کر سکتی ہیں کہ

$$x = 1 = (1 - x) = 0$$

$$x = 1 = (1 - \frac{1}{x}) = 0$$

$$x = 1 = (1 - \frac{1}{x}) + 0 = 0$$

$$x = 1 = (1 - \frac{1}{x}) + (\frac{1}{x} - \frac{1}{x}) = 0$$

فرض کرو کہ لوک  $x$  کو ایسی سلسلہ میں پہلا  $x$  کر او میں  $x$  کی مثبت اور منفی قوتیں ہوں

اور لوک  $x$  کو ایسی سلسلہ میں پہلا  $x$  کر او میں صرف  $x$  کی مثبت قوتیں ہوں

تو ہم مساوات کی دو تواناں کا تطابق فرض کریں تو یہ نتیجہ حاصل ہوگا کہ

$$1 = x = \frac{1}{x} = 0$$

(۲۴۶) دفعہ بالا کی مسئلہ کو مرفی حساب فی اپنی رسالہ مسائل معادلات میں لکھا ہے

اس مسئلہ کا اثبات ناقص ہی کیونکہ سلسلہ غیر منہا ہی صورت مفصلہ کا انفرجی ہو سکتا ہے

اس مسئلہ پر بڑی بڑی کتابوں میں بحث لکھی ہے

(۲۴۷) مثلاً فرض کرو کہ اس مساوات

$$x + x - 1 = 0$$

$$x = 1 = (1 - x) = 0$$

$$x = 1 = (1 - \frac{1}{x}) = 0$$

$$x = 1 = (1 - \frac{1}{x}) + (\frac{1}{x} - \frac{1}{x}) = 0$$

$$x = 1 = (1 - \frac{1}{x}) + (\frac{1}{x} - \frac{1}{x}) = 0$$

اب ہم کو ادھر اقامہ کا انتظام کرنا چاہی جہاں  $x$  ملے ہو تو ہم ایک ایسی رقم





فرض کرو  $\Delta = \Delta$  اسی تمام ارقام بائیں طرف معدوم ہو جاتی ہیں الا وہ مقدار جس میں  $\Delta$  ملحق ہی اور ہم کو بہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{مر } (\Delta) = \Delta \left[ \frac{\Delta}{\Delta - \Delta} \right] \Delta = \Delta$$

یعنی بموجب دفعہ ۷۷ کے

$$\text{مر } (\Delta) = \Delta \times (\Delta)$$

اسی ارقطی دریافت ہوتا ہی اور سطح قیمتیں  $\Delta$  و  $\Delta$  دس کی دریافت ہوتی ہیں (۳۰۰) اب فرض کرو کہ  $\Delta$  (۷) درجہ ادنی کا بہ نسبت  $\Delta$  (۷) کے نہیں ہے تو معمولی تقسیم کے قاعدہ سی ہم کو بہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{\Delta}{\Delta} \times \frac{\Delta}{\Delta} + \Delta = \frac{\Delta}{\Delta} \times \frac{\Delta}{\Delta}$$

اس میں  $\Delta$  (۷) اور  $\Delta$  (۷) جملی صحیح لاکھ میں اور  $\Delta$  (۷) کا درجہ ادنی بہ نسبت  $\Delta$  (۷) کے ہی اب  $\frac{\Delta}{\Delta} \times \frac{\Delta}{\Delta}$  موافق دفعہ گذشتہ کی تحلیل کسو جزئیہ میں کریں چونکہ ہم کو بہ معلوم ہے کہ

$$\text{مر } (\Delta) = \Delta \times \Delta + \Delta \times \Delta$$

اسی بہ استخراج ہوتا ہی کہ  $\Delta$  (۷) اور  $\Delta$  (۷) کی ایک ہی قیمت ہی جب  $\Delta$  (۷) معدوم ہو اسی معلوم ہوا کہ کسو جزئیہ مطابق  $\frac{\Delta}{\Delta} \times \frac{\Delta}{\Delta}$  کی تشخیص موافق دفعہ ۲۴۹ کے ہو سکتی ہیں پہلی اسی کہ ہم  $\Delta$  (۷) کو  $\Delta$  (۷) پر تقسیم کریں اگر  $\frac{\Delta}{\Delta} \times \frac{\Delta}{\Delta}$  کی کامل قیمت دریا کرنی ہوتی تو ہم کو جزو  $\Delta$  (۷) کو سا قسط کرنا نہ جائی ہوتا

(۳۰۱) ہم نتائج کو دقت سی غالی کرنی کی لمی دفعات گذشتہ میں کس رطاعہ کے تحلیل کرتے کا طریقہ کسو جزئیہ میں اوس صورت میں بیان کیا ہی کہ او میں اجزاء ضربی مکرر نہیں اتے یہ ایک خاص صورت تھی اب ہم علی اعموم اسکی تحقیقات کرتے ہیں (۳۰۲) فرض کرو کہ  $\Delta$  (۷) ایک جملہ لاکھ سی میں اجزاء ضربی مکرراتی ہیں مثلاً فرض کرو

مح (۱۱) = ع (۱۱ - ۱) - ب (۱۱ - ۱) - ... - ۱ (۱۱ - ۱)

اور مر (۱۱) کا دوسرا جملہ لاکا ہی تو جملہ مح (۱۱) اجزاء ذیل میں تحلیل ہو سکتا ہے (۱) کوئی جز ضربی ۱۱ - ک جو کہ نہیں آتا اسی ایک رقم ۱۱ - ک سے پیدا ہوگی (۲) جز ضربی (۱۱ - ۱) سے پہلے سلسلہ ارقام پیدا ہوگا کہ

$$\frac{1}{1-11} + \dots + \frac{1}{1-11} + \frac{1}{1-11} + \frac{1}{1-11}$$

اور اسی طرح کا سلسلہ ارقام اور ہر ایک جز ضربی مکرر ہر سی پیدا ہوگا (۳) اگر مر (۱۱) ادنی درجہ کا مح (۱۱) سی نہیں ہوگا تو ایک جملہ صحیح بھی پیدا ہوگا

اسو اسطی کہ فرض کرو کہ مح (۱۱) = (۱۱ - ۱) صر (۱۱) تو اتحاد کچھ ہی ہوا زروی مطابق

$$\text{مر (۱۱)} = \frac{1}{1-11} + \frac{\text{مر (۱۱) - ۱ صر (۱۱)}}{\text{مح (۱۱)}}$$

اب فرض کرو کہ مر (۱۱) - ۱ صر (۱۱) = ۱ - ۱ صر (۱۱) جب ۱۱ = ۱ کے ہو

معدوم ہوگا اور اسیو سطے ۱۱ - ۱ پر پورا تقسیم ہوگا  
اسیو سطے ۱۱ کے اس قیمت کے موافق ہم پہلے رکھ سکتی ہیں کہ

$$\text{مح (۱۱) - ۱ صر (۱۱) = (۱۱ - ۱) مح (۱۱)}$$

اور اسیو سطے

$$\frac{\text{مر (۱۱)}}{\text{مح (۱۱)}} + \frac{1}{1-11} = \frac{\text{مر (۱۱)}}{\text{مح (۱۱)}}$$

اسی طرح سی آخر کسی کی تحلیل کر کے پہلے حاصل کر سکتی ہیں کہ

$$\frac{\text{مر (۱۱)}}{\text{مح (۱۱)}} + \frac{1}{1-11} = \frac{\text{مر (۱۱)}}{\text{مح (۱۱)}}$$

پس اسی طریقہ سی بار بار عمل کرنے سے نتیجہ مطلوب قائم ہو جائیگا

(۳۰۳) دفعہ ۳ کی طرح پہلے ثابت کرنا آسان ہے کہ مح (۱۱) کی تحلیل صحیحہ حملوں میں

ایک ہی طرز پر ہو سکتی ہے اور کسور جزئہ کا ایک سلسلہ ہوتا ہے جسکی نسبت مابین ایک جداگانہ ہی جز ضربی ملتف ہوتا، اسی معلوم ہوا کہ آخر نتیجہ ایک ہی حاصل ہوگا خواہ اعمال کی ترتیب ہی ہو



$$\frac{ا + ب}{ا - ب} = \frac{ا - ب}{ا + ب} \quad س = \frac{ا - ب}{ا + ب}$$

یعنی لاکو بڑا واحد سے فرض کر کے

$$\left[ \frac{ا - ب}{ا + ب} \right] - \frac{ا - ب}{ا + ب} (س + ب) = ا - ب + س$$

مثبت ہے یعنی بہ درجہ اولی مثبت ہے جب

$$\left[ \frac{ا - ب}{ا + ب} \right] - \frac{ا - ب}{ا + ب} (س + ب)$$

صفر یا مثبت ہو

(۱) فرض کرو کہ ب = ۱۰ اور س تعداداً سب سے بڑا منفی مثال ہی توح (لا) مثبت ہے

اگر  $\frac{ا - ب}{ا + ب} = ۱$  - س صفر یا مثبت ہی یعنی اگر  $ا = ۱ + س$  یا اسی بڑی شے کی برابر ہو دفعہ ۸ دیکھو

(۲) فرض کرو کہ ب = ۱۰ اور س تعداداً سب سے بڑا منفی مثال ہو توح (لا) مثبت ہوگا

اگر  $\frac{ا - ب}{ا + ب} = ۱$  - س صفر یا مثبت ہی اور اسی وسطی درجہ اولی مثبت ہوگا

اگر  $\frac{ا - ب}{ا + ب} = ۱ + س$  - س اب ہو یعنی اگر  $ا = ۱ + س + س$  یا کسی بڑی شے کے دفعہ ۸ دیکھو

(۳) ا کی جگہ مقرر رکھو توح (لا) مثبت ہوگا اگر ب = ۱ - (س + ب) صفر یا مثبت ہے

یعنی اگر  $ا = ۱ + س$  یا کسی بڑی شے کی ہمہ ایک نئی حد غائی ہی جو چھوٹی

ب نسبت (۲) کے ہی جب ب بڑی ع سے مقرر کیجئے

(۴) اگر ب بڑا ب نسبت ب کے نہ ہو توح (لا) مثبت ہے اگر

$$\left[ \frac{ا - ب}{ا + ب} \right] - \frac{ا - ب}{ا + ب} (س + ب)$$

صفر ہے یا مثبت ہی یعنی اگر  $ا = ۱ + س$  یا کسی بڑی شے کے

اور اسی چھوٹی حد ب نسبت (۳) کے معلوم ہوئی جب ب چھوٹی ع سی نہ مقرر کیجئے

(۵) فرض کرو کہ ب چھوٹا س سی نہیں ہی تو اس سی ہم کو اعلی حد غائی کہ حاصل ہوگی

(۶) فرض کرو کہ ب چھوٹا س سی نہیں ہی تو (۲) سی  $ا = ۱ + س$  اعلی حد غائی حاصل ہوگی



اس بات کو یاد رکھنا چاہیے کہ جب اول ہی جماعت کا حساب کرو تو اسی جو اعلیٰ حد غائی دریافت ہوگی اسی قیمت پڑا عدد مطلوب بر نہیں ہوگا مثلاً مساوات اٹھارہ درجہ کی ہی تو اب ہم صرف امثال کو جماعتوں میں لکھتی ہیں کہ

$$(۱۰۰۰ - ۱۰۰۰ - ۴۰ - ۱ + ۲ + ۳) + (۱۰۰ - ۲۰) + (۱۰۰ - ۸۰ - ۳ + ۴ + ۵)$$

$$(۴۰۰۰ - ۴۰۰ - ۱۰۰۰) + (۲۰۰۰ - ۸۰۰۰ - ۷۰) +$$

اول جماعت پر خیال کریں تو ہم یہ معلوم ہوتا ہے کہ ۲ مثبت چھوٹا عدد ہی اسلیٰ ۳ پر امتحان کرنا چاہئے اب ہم قیمت

$$۱۰۰ - ۷۸۰ - ۷۳ + ۷۴ + ۷۵$$

کا جب ۷۳ کے ہو حساب کریں

$$\begin{array}{r} ۱۰۰ - \\ ۳۴۲ \end{array} \quad \begin{array}{r} ۸۰ - \\ ۱۵۴ \end{array} \quad \begin{array}{r} ۳۰ \\ ۷۸ \end{array} \quad \begin{array}{r} ۴۰ \\ ۲۵ \end{array} \quad \begin{array}{r} ۵۰ \\ ۷ \end{array}$$

پس ۳۴۲ = ۱۸

اب ہم قیمت

$$۱۰۰ - ۷۲۰ + ۷۳۴۲$$

کا جب ۷۳ کے ہو حساب کرتے ہیں

$$\begin{array}{r} ۱۰۰ - \\ ۳۲۱۸ \end{array} \quad \begin{array}{r} ۲۰ \\ ۱۱۰۴ \end{array} \quad \begin{array}{r} ۳۴۲ \\ ۳۴۲ \end{array}$$

پس ۳۲۱۸ = ۱۸

اب قیمت

$$۱۰۰۰ - ۷۱۰۰ - ۷۳۰ - ۷۴ + ۷۵ + ۷۶ + ۷۷ + ۷۸ + ۷۹ + ۸۰$$

کا حساب جب ۷۳ کے ہو کرتے ہیں

اب یہ ظاہر ہے کہ ہم کو تمام نتائج ۱۸ و ۱۸ و ۱۸ مثبت حاصل ہونگے پس اسی معلوم ہوگا کہ ۳ مثبت قیمتوں کی اعلیٰ حد غائی ہے

اس مثال میں ہوائی دفعہ ۴ کے اعلیٰ حد غائی ۱ +  $\frac{11}{100}$  کا یہ بڑا ۷۰ سے ہے  
اور بموجب دفعہ ۱۴ کے اعلیٰ حد غائی ۱ +  $\frac{3}{100}$  ہی اور یہ اسی زیادہ

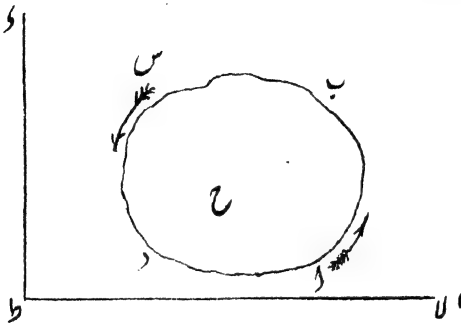
الحاصل مختصر بیان اس مسئلہ کا یہ ہے کہ تمام جملی کو متواتر قیمت اور صحیح جماعتوں  
لے - بے + س - دھن ... تقسیم کرو اور ہر جماعت میں لاکا قوت نما آخر لکھو  
اور لے - بے کو لا پر تقسیم کرو اور کوئی قیمت لاکے مثلاً ایسی دریافت کرو  
کہ وہ خارج قسمت کو مثبت بنائی اور فرض کرو کہ یہ خارج قسمت ل بول لا + س - دھن کو  
لا پر تقسیم کرو اور کوئی قیمت لاکے لب جو شاید لری بڑی نہ ہو اور چوٹی لری تو ہونی نہیں چاہی  
اسی وقت کرو جو خارج قسمت کو مثبت بنائی فرض کرو کہ م بہ خارج قسمت ہو  
اب ہر عمل کو م لا + ہی - ق ہو پر جاری کرو اور علیٰ ہذا القیاس آخر تک یہی عمل جاری رکھو  
تو لاکے آخر قیمت اس طرح حاصل ہوگی وہ مساوات کی ہر یک قیمت سی بڑی ہوگی اور اول قیمت  
لاکے یعنی لے اگر آخر قیمت ہوئی ہے

(۳۰۷) ایک مسئلہ کا چرچا کا لکھنا اس باب کو ختم کرتی میں مطلب اس مسئلہ کا یہ ہے  
کہ حدود و معینہ کی درمیان یہ دریافت کریں کہ کتنی حقیقی اور کتنی خیالی قیمتیں واقع ہوتی ہیں  
سٹریم حساب کی ضابطہ میں خاص حقیقی قیمتوں کی نسبت بیان کیا گیا ہے وہ یہاں اس مسئلہ میں  
علیٰ اعموم خیالی اور حقیقی قیمتوں کی واسطی بیان کیا جاتا ہے غرض ضابطہ مخصوص حقیقی قیمتوں کے مطابق  
اور یہ مسئلہ علیٰ اعموم سب قیمتوں کے واسطے ہے

(۳۰۸) کوئی قائم الزامیہ مقرر کرو اور لا اور دھن کسی نقطہ کے مقرر کرو اور  
مح (ی) کوئی جملہ ناطقہ کی فرض کرو تو مح (لا + س - دھن) اس صورت ع + ق - دھن  
میں بیان ہو سکتا ہے جو نقطہ ایسا کہ جسکی محدودین ع اور ق کو ایک ہی وقت میں مقرر کر دینے  
اوسکا نام نقطہ اصلی رکھو اور ایک ضابطہ (ب) س دکنچہ تو بعد ان نقاط اصلی کی جو  
اس حلقہ کی درمیان واقع ہونگی قاعدہ ذیل سی دریافت ہو جائیگی فرض کرو کہ ایک نقطہ اس



احاطہ کی گرد متبت سمت میں حرکت کرنا چاہی اور اس بات کو گنتے جاؤ کہ کتنی دفعہ جی کی نوبت صفر پہنچتی ہے اور اسکی علامت تبدیل ہوتی ہے فرض کرو کہ ک دفعہ اسکی علامت + سی - اور ل دفعہ - سی + ہی تو تعداد نقاط اصلی کی احاطہ کے اندر  $\frac{1}{2} (ک - ل)$  ہوگی



اس بات پر خیال کرنا چاہی کہ احاطہ ایسا مقرر کیا گیا ہے کہ کوئی نقطہ اصلی اسکی اوپر نہیں واقع ہوتا اور اگر کوئی خیالی قیمت مساوات ج (ی) = - دو دفعہ باتین دفعہ بازادہ دفعہ ای تو ہم کو خیال کرنا چاہیے کہ دو باتین بازادہ اصلی نقطہ میں اگرچہ وہ منطبق ایک دوسرے پہنچے اور متبت سمت میں حرکت کرنی ہی مراد ہماری ہے کہ ایک نصف دائرہ ایک نقطہ قائم سی حلقہ کی اندر نقطہ متحرک تک پہنچا گیا ایک چار قوائم کی برابر متبت زاویہ پر گزرتا ہے اور نقطہ متحرک گرد حلقہ کے گزرتا ہے اس سبب کی ثابت کرنی کی لئی اول صورت بی نہایت ہی چھوٹی احاطہ کی لیتی ہیں اور پھر ایک صورت احاطہ محدود کی لیتے ہیں

(۳۰۴) احاطہ کی اندر کوئی نقطہ جو نقطہ اصلی نہ ہو مقرر کرو اور ایک نہایت ہی چھوٹا احاطہ جس میں ج بھی داخل ہو مقرر کرو اور فرض کرو کہ نقطہ متحرک متبت سمت میں اس نہایت ہی چھوٹی احاطہ کی گرد حرکت کرتا ہے تو ہم کو اب چار صورتوں پر بحث کرنی چاہیے

(۱) فرض کرو کہ نہ ج نہ ق اس احاطہ کی اندر نہ اس احاطہ کے اوپر معدوم ہوتی ہیں

یہاں پہلی غلطی نام دور میں علامت نہیں بدلتی تو قاعدہ سی یہ معلوم ہوتا ہے کہ کوئی اصلی نقطہ

احاطہ کی درمیان نہیں ہے اور یہ صحیح ہے کیونکہ ع اور ق معدوم نہیں ہوتے

(۲) فرض کرو کہ احاطہ کی اندر نہ احاطہ کی اوپر ق معدوم ہوتا ہے مگر ع معدوم ہوتا ہے

اس صورت میں ع علاوہ بدلتا ہے جبکہ نقطہ مشترک یہی مقام پر گذرتا ہے یہاں ع معدوم ہوتا ہے

لیکن انجام دورہ پر ع اپنی اصلی علامت پر اجابا تا ہے تو اسی معلوم ہوتا ہے کہ جتنی تغیر ہے

کے ہوئی ہوئی اتنی تغیر سی کے ہوئی ہوئی اسی معلوم ہوا کہ ک اور ل برابر ہیں اور قاعدہ

سی ظاہر ہوتا ہے کہ کوئی اصلی نقطہ احاطہ کی درمیان نہیں واقع ہوتا اور یہ صحیح ہے کیونکہ ق معدوم نہیں ہوتا

(۳) فرض کرو کہ احاطہ کی اندر اور نہ احاطہ کی اوپر ع معدوم ہوتا ہے لیکن ق معدوم ہوتا ہے اس

صورت میں ع کبھی معدوم نہیں ہوگا بقاعدہ سی یہ معلوم ہوتا ہے کہ کوئی نقطہ اصلی احاطہ کے

اندر نہیں ہے اور یہ صحیح ہے کیونکہ ع معدوم نہیں ہوتا

(۴) فرض کرو کہ ع اور ق دونو احاطہ کی اندر اور اوپر معدوم ہوتے ہیں اگر وہ دونو

ایک وقت معدوم نہ ہوں تو ہم سطح کو جو احاطہ کی گہری ہوئی ہے اور سطوح میں تقسیم کردینے

جسمین بعض پر ع مقرر معدوم ہوتا ہے اور باقی میں صرف ق معدوم ہوتا ہے تو اس طرح سی دو

یا زیادہ احاطی بجای ایک احاطہ کی حاصل ہوئی اور انکی صورت موافق صورت (۲) اور (۳)

کے ہوگی پس صرف یہی ایک صورت رہی جس میں ع اور ق دونو ایک ہی وقت معدوم نہ ہوں

اور ایک نقطہ اصلی احاطہ کے اندر یا اوپر ہے اور ہم احاطہ کو ایسا چھوٹا فرض کر سکتے ہیں کہ

کہ اس میں صرف ایک ہی نقطہ اصلی واقع ہو اور کوئی اسکی اوپر نہ ہو

فرض کرو کہ ط اور ص اس اصلی نقطہ کے محدین ہیں اور لا = ط + ص + حم

اور ر = ص + لی جب ر

لا + ص = لا + ص + ب + ج + نق (حم ر + لا جب ر)

= ط + ص + لا + و کے مقرر کرو



اسی معلوم ہوا کہ اندر کے خطوط تقسیم محو ہو سکتی ہیں اور لفظ متحرک فقط احاطہ لابس  
کو مرسم کرتا ہے

پس مسئلہ ثابت ہوا

(۳۱۱) اب ہم اس مسئلہ سے ایک اور مسئلہ مستنبط کرتی ہیں کہ اگر ایک مساوات  $n$  درجہ کی ہو  
تو اسکی  $n$  قیمتیں ہونی چاہیے فرض کرو کہ احاطہ لابس دایک دائرہ ہو اور مرکز اوسکا  
مبداء ہو اور اسکا قطر غیر متناہی بڑا ہو تو قیمت  $n$  کی اوس رقم  $m$  (س) پر  
موقوف ہوجس میں اعلیٰ قوت  $m$  کی ملے ہو اور اگر ہم اوس رقم کو  $m$  (جم) سے  $m$  (سبب) سے  
فرض کریں تو  $n = m$  (ن ہر + س) پس ہم کو یہ حاصل ہوگا کہ  $k = 2n$   
اور  $n = 0$  پس  $\frac{1}{n}$  (ک - ل) =  $n$

(۳۱۲) ہم فی دفعہ ۳۰۸ میں شکل ایسی کھینچی ہے کہ احاطہ کی ہر ایک نقطہ اندر فی سے ایک  
نصف قطر دائرہ ایک سمت میں کھینچا ہے اور احاطہ سی ایک ہی نقطہ پر ملتا ہے لیکن احاطہ  
کی قید اس شکل کی ساتھ ضرور نہیں شکل ایسی بھی ہو سکتی کہ نصف قطر دائرہ ایک سمت میں کھینچا گیا  
احاطہ سی طاق دفعہ ملاتی ہو

اسی معلوم ہوا کہ جب نقطہ گرد احاطہ کی متحرک ہوتا ہے تو نصف قطر دائرہ جو نقطہ متحرک اور  
کسی مبداء قائم کے درمیان کھینچا جائی اور یہ نقطہ قائم احاطہ کے اندر ہو تو  
وہ ہمیشہ ایک ہی سمت میں متحرک نہیں ہوگا نقطہ متحرک کی مثبت سمت حرکت سی ہم کو سمجھنا چاہئے  
کہ گویا زاویہ دائرہ ہمیشہ زیادہ نہ ہوتا ہو مگر اوپر دورہ میں مثبت زاویہ کہ کی برابر افزائش ہوتی  
جس ہمت کی بیان شکل لکھی ہے اوسکی قید کچھ نہیں ہے غرض شکل کا اثر اثبات پر نہیں ہے کیونکہ  
بے نہایت چھوٹی احاطہ اگر ہم چاہیں تو ہر ہی ایسی فرض ہو سکتی ہیں کہ وہ بیضوی ہوں جو مبداء متحرک  
صرف ایک سمت محدودہ میں نصف قطر دائرہ کھینچا کر کہتی ہوں اور اگر ہم اس قید کے بھی  
باب نہ رہیں تو ہم کو یہ دیکھنا چاہی کہ دفعہ ۳۰۴ کی آخرین پر ہمیشہ زیادہ نہیں ہوتا تو

بر کی اتنی قیمتیں ایسی ہوں گیں کہ حلی سبب سی بچے معدوم ہوگا  
 جنکا ہم کو خیال بھی نہ تھا لیکن اگر ایسا ہوگا تو اتنی ہی وہاں تغیرات سی۔ اور سی۔ بر ہو گئے  
 (۳۱۳) ہم اپنی ساری تحقیقات میں یہ فرض کیا ہی کہ احاطہ کی اوپر کوئی نقطہ اصلی نہیں ہے  
 اگر نقطہ اصلی احاطہ پر ہو تو ہماری تحقیقات میں کچھ تغیر سوار دفعہ ۳۰۴ کے آخر کے نہیں  
 واقع ہوگا اور یہاں فقط اتنا ہوگا کہ سر کے وسطی ۲ کہ کی ترتیب تہی اب صرف لکی ترتیب ہوگی  
 اور م تغیرات علامت بجای ۲ م تغیرات علامت کے واقع ہونگے

(۳۱۴) یہ کہ چچی حصا کا ضابطہ یعنی انسانی کو پڑیا کے مسائل معادلات کے اندر لکھا ہوا ہے  
 اور پروفیسر ڈی ہوگن کی علم مثلث اور جبر مقلدہ میں اور انہیں حصا کی اور تحریرات میں  
 موجود ہی غرض انہیں کتابوں سی اخذ کر کے یہ دیکھ لکھا ہے

### پچیسواں باب ادخال مقطعات

(۳۱۵) مسئلہ مقطعات کا اب ہم کچھ بیان کرنی ہیں یہ فرع علم ریاضی کی زمانہ حال کا ایجاد ہے  
 روز بروز اس کی ترقی ہوتی جاتی ہی اور بہت بڑی بڑی کام اسی نکلتی ہیں اس باب میں  
 بعض مخاص مثالیں اولی بیان کرینگے اور اذکی توضیح اور تشریح اس طرح کرینگے کہ جتنی طالب علم  
 مقطعات کی ذات اور صفات کو بخوبی سمجھ جائیں اسی الی ایک باب میں مسائل عامہ اس فرع کے  
 لکھینگے اور ہر ایک باب میں مسائل معادلات میں جو کام اونی نکلتا ہی اور سطح اول کا استعمال ہوتا ہے بیان کر  
 (۳۱۶) ان معادلات سم زاد بر خیال کرو کہ

$$۱۱ + ۱۲ = ۲۳ \quad ۱۳ + ۱۴ = ۲۷ \quad ۱۵ + ۱۶ = ۳۱$$

ان مساواتوں سے ہم حاصل ہوتا ہے

$$\frac{۱۱ + ۱۲ = ۲۳}{۱۱ + ۱۲ = ۲۳} = \frac{۱۳ + ۱۴ = ۲۷}{۱۳ + ۱۴ = ۲۷} = \frac{۱۵ + ۱۶ = ۳۱}{۱۵ + ۱۶ = ۳۱}$$

نسب نامہ مشترک ۱۱ + ۱۲ - ۱۳ + ۱۴ - ۱۵ + ۱۶ کو چار مقامات پر ۱۱ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ + ۱۶ کا مقطع کہتے ہیں  
 اور اس کو اس رمز سے تعبیر کرتے ہیں کہ

لا اور ء کی قیمتوں کی شمار کنندوں کو بھی مقطعات کہتی ہیں اور لا اور کی قیمت کو اس طرح ظاہر کیا کرتے ہیں کہ

$$\begin{array}{|c|} \hline ۱ \text{ د ب } ۱ \\ \hline ۱ \text{ د ب } ۲ \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline ۱ \text{ د ب } ۱ \\ \hline ۱ \text{ د ب } ۲ \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline ۱ \text{ د ب } ۱ \\ \hline ۱ \text{ د ب } ۲ \\ \hline \end{array}$$

(۳۱۷) ان مقطعات کو رتبہ دوم کا کہتی ہیں کیونکہ ہر ایک رقم اولیٰ دو مقداروں سے مرکب ہے اور مقداریں ۱ د ب ۱ اور ۱ د ب ۲ کو جو مقطع ۱ د ب ۲ میں واقع ہوتی ہیں اجزاء ذاتی کہتی ہیں اور حاصل ضرب ۱ د ب ۲ اور ۱ د ب ۱ کو اجزاء ترکیبی مقطع کی کہتی ہیں رتبہ دوم کی مقطع میں جہاں اجزاء ذاتی اور دو اجزاء ترکیبی ہوتی ہیں اس مقطع کے تعبیر کرنی کی واسطی جو رز او بر بیان ہوئی ہی اسکی شکل مربع کی ہوتی ہیں اور اوس میں دو صفین افقی ہوتی ہیں یا دو صفین عمودی

(۳۱۸) اب رتبہ دوم کی مقطعات کی بعض صفات کا بیان کرتے ہیں چونکہ یہ ہم کو حاصل ہے کہ

$$\begin{array}{|c|} \hline ۱ \text{ د ب } ۱ \\ \hline ۱ \text{ د ب } ۲ \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline ۱ \text{ د ب } ۱ \\ \hline ۱ \text{ د ب } ۲ \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline ۱ \text{ د ب } ۱ \\ \hline ۱ \text{ د ب } ۲ \\ \hline \end{array}$$

اسی بہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر افقی صفوں کو عمودی صفوں میں بدل دیں تو کچھ فرق نہیں آتا (۳۱۹) ذیل کے مطابق اسانی سے ثابت ہوتے ہیں کہ

$$\begin{array}{|c|} \hline ۱ \text{ د ب } ۱ \\ \hline ۱ \text{ د ب } ۲ \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline ۱ \text{ د ب } ۱ \\ \hline ۱ \text{ د ب } ۲ \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline ۱ \text{ د ب } ۱ \\ \hline ۱ \text{ د ب } ۲ \\ \hline \end{array}$$

پس مقطع میں اگر دو افقی صفین یا دو عمودی صفین ہیں متبادل ہو جائیں تو مقطع کی علامت بدلا جاتی ہے مگر اسکی قیمت میں کچھ خلل نہیں واقع ہوتا اور اگر ہم دونوں متبادل

ہوں تو مقطع میں کچھ ہی تبدل نہیں واقع ہوتا

(۳۲۰) ہم کو معلوم ہے کہ

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \text{ع} \text{ ا} \text{ و} \text{ ب} \text{ ا} \\ \hline \text{ع} \text{ ا} \text{ و} \text{ ب} \text{ ب} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ع} \text{ ا} \text{ و} \text{ ب} \text{ ا} \\ \hline \text{ع} \text{ ا} \text{ و} \text{ ب} \text{ ب} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ع} \text{ ا} \text{ و} \text{ ب} \text{ ا} \\ \hline \text{ع} \text{ ا} \text{ و} \text{ ب} \text{ ب} \\ \hline \end{array}$$

پس اگر ایک افقی صف کی یا ایک عمودی صف کی ہر جزائی کو ایک مقدار معلوم میں ضرب دیں تو مقطع کی ضرب اوس مقدار معلوم میں ہو جاتی ہے

(۳۲۱) ہم کو معلوم ہے کہ

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \text{ا} \text{ و} \text{ ب} \text{ ا} \\ \hline \text{ا} \text{ و} \text{ ب} \text{ ب} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ا} \text{ و} \text{ ب} \text{ ا} \\ \hline \text{ا} \text{ و} \text{ ب} \text{ ب} \\ \hline \end{array}$$

پس اگر دو افقی صفین اور عمودی صفین متطابق ہوں تو مقطع معدوم ہو جائیگا  
(۳۲۲) مقطعات کی توضیح اور تشریح سے یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \text{ا} \text{ و} \text{ ب} \text{ ا} + \text{ا} \text{ و} \text{ ب} \text{ ب} \\ \hline \text{ا} \text{ و} \text{ ب} \text{ ا} + \text{ا} \text{ و} \text{ ب} \text{ ب} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ا} \text{ و} \text{ ب} \text{ ا} + \text{ا} \text{ و} \text{ ب} \text{ ب} \\ \hline \text{ا} \text{ و} \text{ ب} \text{ ا} + \text{ا} \text{ و} \text{ ب} \text{ ب} \\ \hline \end{array}$$

پس وہ مقطع جس کا ہر یک جزائی مجموعہ دو قوتوں کا ہو ماسوی اور چار مقطعات کی ہوتا ہے جو اس سے  
بنتی ہیں کہ بجای ہر کل سطر عمودی کی ہم اونکی جزئیات عمودی سطروں کی لین اور ہم ایک خاص  
صورت ہی کہ ہم فرض کریں  $\text{ا} = \text{ب}$  اور  $\text{ا} = \text{ب}$  تو بموجب دفعہ ۳۲۰ کے  
اوپر کے چار مقطعات میں سی دوسرا مقطع معدوم ہو جائیگا اور ہم کو یہ حاصل ہوگا کہ

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \text{ا} \text{ و} \text{ ب} \text{ ا} + \text{ا} \text{ و} \text{ ب} \text{ ب} \\ \hline \text{ا} \text{ و} \text{ ب} \text{ ا} + \text{ا} \text{ و} \text{ ب} \text{ ب} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ا} \text{ و} \text{ ب} \text{ ا} + \text{ا} \text{ و} \text{ ب} \text{ ب} \\ \hline \text{ا} \text{ و} \text{ ب} \text{ ا} + \text{ا} \text{ و} \text{ ب} \text{ ب} \\ \hline \end{array}$$

(۳۲۳) بموجب دفعہ ۳۲۲ کے







جدا گانہ نسب نما کی رموزی جملوں میں تبدیل کر لین تو شمار کنندہ کی رموزی جملہ حاصل ہو جائے  
اب ہم کو پہلے ظاہر معلوم ہوتا ہے کہ جو صفت اور خاصیت دوسرے رتبہ کی مقطعات کی تھی وہی  
ان تیسرے رتبہ کی مقطعات کی صفت اور خاصیت ہے  
(۳۲۵) فرض کرو کہ ۱ = ۱ اور ۲ = ۱۰ اور ۳ = ۱۰ تو پہلے حاصل ہو گا کہ

$$\begin{array}{|c|} \hline ۱ \text{ و } ۱ \text{ و } ۱ \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline ۲ \text{ و } ۲ \text{ و } ۲ \\ \hline \end{array}$$

پس اس طرح تیسرے رتبہ کی مقطع کی تحویل دوسرے رتبہ کے مقطع کی طرف ہوگی اور  
ب اور ۱ کے قیمتیں کچھ اس مقطع پر نہیں کہتیں اور اگر ہم چاہیں تو ان کو برابر  
صفر کے لکھ سکتے ہیں

اسی معلوم ہوا کہ اگر کوئی ہم کو ارتباط تیسری رتبہ کے مقطعات میں معلوم ہو تو اسی  
مثل اس ارتباط کے دوسری رتبہ کی مقطعات میں ایک ارتباط اس طرح استباط  
کر سکتے ہیں کہ بعض اجزا ذاتی کو معدوم خیال کریں  
(۳۲۶) مقطعات کی تشریح اور توضیح سے یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ

$$\begin{array}{|c|} \hline ۱ \text{ و } ۲ \text{ و } ۲ \text{ و } ۲ \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline ۱ \text{ و } ۲ \text{ و } ۲ \text{ و } ۲ \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline ۱ \text{ و } ۲ \text{ و } ۲ \text{ و } ۲ \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline ۱ \text{ و } ۲ \text{ و } ۲ \text{ و } ۲ \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline ۱ \text{ و } ۲ \text{ و } ۲ \text{ و } ۲ \\ \hline \end{array}$$





ا ا س ا + ب ا ص ا + س ا س ا و ا ل س م + ب ا ص م + س ل س م + س ل س م  
 ا ل س ا + ب ا ص ا + س ل س ل و ا ل س م + ب ا ص م + س ل س م + س ل س م  
 ا ل س ا + ب ا ص م + س ل س ل و ا ل س م + ب ا ص م + س ل س م + س ل س م  
 یہ دریافت ہوا ہے کہ ۲۴ مقطعات میں چکامچورہ یہ خیال کر سکتی تمام سوا ۶ کی بموجب دفعات ۳۲۸  
 اور ۳۲۹ کے معدوم ہو جاتی ہیں مثلاً ۲۴ مقطعات میں سی ایک یہ لو کہ

|                             |             |                 |
|-----------------------------|-------------|-----------------|
| ا ا س ا و ا ل س م و ب ا ص م | س ا س م ص م | ا ا و ا و ب ا   |
| ا ل س م و ا ل س م و ب ا ص م | یعنی        | ا ل و ا و ب ا   |
| ا ل س م و ا ل س م و ب ا ص م |             | ا ل و ا ل و ب ا |

بموجب فقرہ ۳۲۸ کے اور یہ مقطع بموجب فقرہ ۳۲۹ معدوم ہوتا ہے اور جو چہرہ مقطعات باقی رہتی ہیں  
 ان میں سے ایک یہ ہے کہ

|                               |           |                 |
|-------------------------------|-----------|-----------------|
| ا ا س ا و ب ا ص م و س ا ل س م | س ا ل س م | ا ا و ب ا و س ا |
| ا ل س م و ب ا ص م و س ل س م   | یعنی      | ا ل و ب ا و س ا |
| ا ل س م و ب ا ص م و س ل س م   |           | ا ل و ب ا و س ا |

ایک اور باقی ماندہ چہرہ مقطعات میں سے لوتو

|                               |           |                 |
|-------------------------------|-----------|-----------------|
| ا ا س ا و س ا ل س م و ب ا ص م | س ا ل س م | ا ا و س ا و ب ا |
| ا ل س ا و س ل س م و ب ا ص م   | یعنی      | ا ل و س ا و ب ا |
| ا ل س ا و س ل س م و ب ا ص م   |           | ا ل و س ا و ب ا |

|                  |                 |
|------------------|-----------------|
| یعنی - س ا ل س م | ا ا و ب ا و س ا |
|                  | ا ل و ب ا و س ا |
|                  | ا ل و ب ا و س ا |

بموجب دفعہ ۳۲۸ کے

اسکا نتیجہ یہ ہے کہ جو چہرہ مقطعات باقی رہتی ہیں ان میں سے ایک یہ بنتا ہے کہ

|               |  |               |
|---------------|--|---------------|
| ۱م و ب ۱ دس ۱ | [ ۱م (صم لرم - صم لرم) + ۲م (صم لرم - صم لرم) + ۳م (صم لرم - صم لرم) ] | ۱م و ب ۲ دس ۲ |
| ۱م و ب ۲ دس ۲ |  | ۱م و ب ۳ دس ۳ |
| ۱م و ب ۳ دس ۳ |  |               |

|               |   |               |
|---------------|---|---------------|
| ۱م و ب ۱ دس ۱ | x | ۱م و ب ۱ دس ۱ |
| ۱م و ب ۲ دس ۲ |   | ۱م و ب ۲ دس ۲ |
| ۱م و ب ۳ دس ۳ |   | ۱م و ب ۳ دس ۳ |

اسی معلوم ہوتا ہے کہ حاصل ضرب تیسری رتبہ کی دو مقطعات کا تیسری رتبہ کے مقطع میں

نمایان ہو سکتا ہے اگر ہم ۱م و ب ۱۰۰۰ جدا گانہ برابر ۱م و ب ۱۰۰۰ کے فرض کریں

تو ہم تیسری رتبہ کا مقطع حاصل کریں گے اور یہ منساوی تیسری رتبہ کے مقطع کے مجزوء کے ہوگا

(۳۳۲) ہم فی ہر مثالین مقطعات کی ذات اوصاف کی لکھ دیں ہیں کہ طالب علم کی سمجھ میں

بخوبی یہ بات اجائیگی کہ ہم مضمون کیا ہی ہم صرف رتبہ سوم کی مقطعات پر مطلب کو چھوڑتے ہیں اس لیے

جو خواص مقطعات رتبہ سوم کی ثابت ہوئیں اسی موافق دفعہ ۳۲۵ کے رتبہ دوم کے مقطعات

کی خواص استخراج ہو سکتی تھی مگر جس طرح سی ہم فی اس مضمون کو بیان کیا ہی اسی طرح تبدیوں کے واسطے

سودمند ہی باب ایندہ میں ہم اثبات علی العموم لکھینگے خواہ مقطعات کسی رتبہ کے ہوں

اس بات پر غور کرو کہ ہم فی اس مقطعات کی مطلب کی تمہید ہمزاد مساواتوں کو حل سے لکھی ہے

اس تمہیدی طالب علم ایک ہی دفعہ میں سمجھ سکتا ہے اسی جملی جنکا نام مقطعات رکھا ہے

ریاضیات میں واقع ہوتی ہیں جب ہم مسئلہ عامہ لکھینگے تو وہاں مقطعات کے تغیرات بالکل

مساوات سی بی لگاؤ لکھینگے اور اسی اس مسئلہ عامہ کے بیان کرنی میں آسانی ہوتی ہے

اگر ہم تیسرے رتبہ کے مقطع کو ان معنی جدید کے موافق بیان کریں تو طالب علم اس تعریف

مقطعات کو جواب ایندہ میں بیان ہوگی خوب سمجھے گا

(۳۳۳) قیمت مقطع

|               |
|---------------|
| ۱م و ب ۱ دس ۱ |
| ۱م و ب ۲ دس ۲ |
| ۱م و ب ۳ دس ۳ |

۱۰ ب ۲ س ۳ - ۱۰ ب ۳ س ۴ - ۱۰ ب ۴ س ۵ - ۱۰ ب ۵ س ۶ - ۱۰ ب ۶ س ۷ - ۱۰ ب ۷ س ۸ - ۱۰ ب ۸ س ۹ - ۱۰ ب ۹ س ۱۰  
 ہی اول جز ترکیبی ۱۰ ب ۲ س ۳ ہی اور پہلے حاصل ضرب بدولت اجزاء ذاتی کا ہی جو اس دفتر کے مربع میں  
 کہ مقطع کو تغیر کرتا ہی قطریں لکھی ہوئی ہیں اور اب باقی اور اجزاء ترکیبی اول جز ترکیبی سے  
 موافق طریقہ ذیل کی استخراج ہو سکتی ہیں کہ اعداد زیرین ۱۰ ۲ ۳

حروف ۱۰ ب ۲ س کی پنچاوتنی مختلف طوروں سی لگائی گئی ہیں جتنی طور سی ترتیب میں ان اعداد  
 زیرین کی ہو سکتی ہیں اور علامت + یا - کی کسی جز ترکیبی کے اول سطح لگ سکتی ہے  
 کہ یہ دیکھیں کہ یہ جز ترکیبی اول جز ترکیبی سی سطح مستطیل ہو ہی اگر جفت دفعہ تبدلات دو  
 اعداد زیرین کا ہو ہی تو + کی علامت لکھو اور اگر طاق دفعہ تبدلات ہوئی ہیں تو - کی علامت مقرر کرو  
 مثلاً دوسرا جز ترکیبی ۱۰ ب ۲ س ۳ ہی اور وہ اول جز ترکیبی سی سطح استخراج ہو ا ہے  
 اعداد زیرین ۱۰ ۲ ۳ میں تبادل ہو ہی اسلیٰ بموجب قاعدہ کے علامت - کی اول لگائی جائے  
 اور یہ جز ترکیبی ۱۰ ب ۲ س ۳ ہی اور وہ دوسرا جز ترکیبی سی سطح حاصل ہوتا ہے کہ

اعداد زیرین ۱۰ ۲ اور میں تبادل ہو ہی اور اسوا سطح وہ اول جز ضربی سی دو اعداد زیرین کے  
 دو تبادل سی مستطیل ہوتا ہی اسوا بموجب قاعدہ کی علامت + کی اول لگائی جائی اور اس سطح  
 اور باقی اجزاء ترکیبی کی منسوب علامات کا فیصلہ ہو سکتا ہے

(۳۳۴) ترتیب کے مقطع کے یہ خاص صورتیں منسلک ذیل میں جنکو طالب علم ثابت کر سکتا ہے

|     |                                   |
|-----|-----------------------------------|
| (۱) | ۱۰ و ۲ و ۳                        |
|     | صوب و ۲                           |
|     | ۱۰ ب ۳ - ۱۰ ب ۲ - ۱۰ ب ۱ - ۱۰ ب ۰ |
|     | ۱۰ ب ۳ - ۱۰ ب ۲ - ۱۰ ب ۱ - ۱۰ ب ۰ |

|     |                                   |
|-----|-----------------------------------|
| (۲) | ۱۰ و ۱ و ۲                        |
|     | ۱۰ و ۲ و ۳                        |
|     | ۱۰ ب ۳ - ۱۰ ب ۲ - ۱۰ ب ۱ - ۱۰ ب ۰ |
|     | ۱۰ ب ۳ - ۱۰ ب ۲ - ۱۰ ب ۱ - ۱۰ ب ۰ |

|   |  |
|---|--|
| (۳) اول ۱ + اول ۲ + اول ۳                           |  |
| اول ۱ + اول ۲ + اول ۳ = (۱-۲+۳) + (۲-۳+۱) + (۳-۱+۲) |  |
| اول ۱ + اول ۲ + اول ۳                               |  |
| (۴) اول ۱ - اول ۲ - اول ۳                           |  |
| - اول ۱ - اول ۲ - اول ۳ = ۱ + ۲ + ۳ + ۱ + ۲ + ۳     |  |
| اول ۱ - اول ۲ - اول ۳                               |  |

### چہیمسوان باب خواص مقطعات

(۳۳۵) فرض کرو کہ ان رموز ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰ ۱۱ ۱۲ میں تو اس ایک رمز کو بہ نسبت دوسرے رمز کے اعلیٰ کہینگے جس میں کہ عدد زیرین بڑا بہ نسبت دوسرے عدد زیرین کے ہو مثلاً ۱۲ کو اعلیٰ بہ نسبت ۱۲ یا ۱۱ کے کہینگے یا ۱۰ کو اعلیٰ بہ نسبت ۱۰ یا ۹ کے کہینگے اور علیٰ ہذا اقیاس اب فرض کرو کہ ان رموز کی ترتیب بنائی گئیں تو جس ترتیب میں دو رموزوں کی اعداد زیرین ملنے اول بڑا بہ نسبت دوسرے کی ہو تو اسی بی ترتیبی یا انتشار کہتی ہیں مثلاً ترتیب ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰ ۱۱ ۱۲ میں جاری ترتیب ان میں یعنی ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰ ۱۱ ۱۲ اور ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰ ۱۱ ۱۲ (۳۳۶) رموز ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰ ۱۱ ۱۲ میں دو نوع کی ترتیبیں ہو سکتی ہیں ایک وہ جنہیں جفت اعداد بی ترتیبوں کی ہو دوسرے وہ جنہیں طاق اعداد بی ترتیبوں کی ہو

(۳۳۷) جب کسی ترتیب میں دو رموز میں تبادلہ ہو کہ ایک دوسرے کے مقام بدل لے اور باقی رموز میں کچھ تبدیلی نہ ہو تو اعداد بی ترتیبوں کی جو زیادہ یا کم ہوگی وہ طاق ہوگی فرض کرو کہ اگر دو رموز میں جنہیں کہ اعلیٰ ہی اور گہ سی پیشتر جماعت رموز کو تعبیر کرتا ہے اور گہ اور گہ کی درمیان جو جماعت رموز ہوا و سکوب تعبیر کرتا ہے اور گہ اور گہ کے بعد جو جماعت رموز ہوا و سکوس تعبیر کرتا ہے تو جن ترتیبوں کا باہم مقابلہ کرنا ہے وہ اگر گہ ب گ س اور گہ ب گ س میں تو بی ترتیبوں کی اعداد کا فرق موقوف اون رموز







کو لگتی ہیں اور اسکی اول زمرج # کو لکھ دیتی ہیں اور اسی تعبیر ہوائی مجموعہ اجزاء ترکیبی کا جو اول جز ترکیبی ہی مناسب ترتیبوں اور علامات + اور - کی ٹھیک ٹھیک فکر کرتے حاصل ہوتا ہے، مقطع کی اجزاء ترکیبی مختلف طور سے تعبیر ہوتی ہیں کہی تو (ے وک) کو بجا لے دے وک کے کام میں لاتی ہیں اور اس صورت میں یہ بیدار کنیا چاہی  
 کہ (ے وک) اور (ک وے) جدا جدا مقدار تعبیر ہوتی ہیں انی رتبی کے مقطعات کی مثالوں میں آسمین آسانی ہوتی ہے کہ دوسری اعداد زیرین کام میں نہ لائیں ایک ہی حرف تمام اجزاء ذاتی کے واسطی جو ایک عمودی صف میں ہو کام میں لائیں اور ایک ہی اعداد زیرین سی او نمین مخیر پیدا کریں یہی طریقہ کتاب پہلی باب میں اختیار کیا گیا ہے

(۳۴۲) اور اجزاء ترکیبی مقطع کی اول جز ترکیبی سی سطح استخراج ہوتی ہیں کہ دوسری اعداد زیرین ترتیبیں لیتی ہیں اور اول اعداد زیرین میں کچھ تبدیل نہیں کرتے اور یہ اجزاء ترکیبی ایک اور طرح سی حاصل ہوتی ہیں کہ اول اعداد زیرین کی ترتیبیں لین اور دوسرے اعداد زیرین میں تبدیل نہ کریں اس واسطی کہ فرض کرو کہ  
 ۳۵ و ۵۰ و ۱۰۰ ایک خاص ترتیب میں ان اعداد ۲۵ و ۳۰۰۰ ن  
 کی تعبیر کریں تو ۱۵ و ۲۵ و ۳۵ و ۵۰ و ۱۰۰ ایک جز ترکیبی ہی جو اس طرح پیدا ہوتا ہے کہ اول جز ترکیبی میں دوسری اعداد زیرین ۲۵ و ۱۰۰ کو  
 ۳۵ و ۵۰ و ۱۰۰ سے بدل دیں لیکن یہی جز ترکیبی اول جز ترکیبی

۱۵ و ۲۵ و ۳۵ و ۵۰ و ۱۰۰ سے بھی اس طرح استخراج ہو سکتا ہے کہ  
 دوسری اعداد زیرین میں کچھ تبدیل نہ کریں اور اول اعداد زیرین کو مناسب طور پر تبدیل کریں یعنی اکو سی اور ۲ کو صد سے اور ۳ کو لڑ سے ۱۰۰ اور ۱ کو سو سے  
 ان دونوں طریقوں سے جو استخراج ہوتا ہے او نمین دونوں اعداد زیرین کے تبادل کی  
 تعداد ایک ہی ہوتی ہے اور اس واسطی ایک ہی علامت جز ترکیبی کے اول بموجب قاعدہ













مثلاً

اے واوا۔۔۔ اے + اوک - اے + اوک + اے + اوک + اے + اوک  
اے واوا۔۔۔ اے + اوک - اے + اوک + اے + اوک + اے + اوک

پس لے کر مقطع صورت میں نمایاں ہوا اور وہ رتبہ کا ہی لے کر قیمت پر پڑ کر کسی شریف کو  
ہم۔ بجای ہر ایک جز ذاتی کی ک دین صف عمودی سوار کے رکھ سکتی ہیں  
بموجب دفعات ۳۷۶ یا دفعہ ۳۷۷ کے ہم لے کر کو مقطع (ن) - (۱) رتبے کا بنا سکتی ہیں  
پس ہم دفعہ ۳۷۷ کی ترکیب اختیار کر کے ۱۔ مدور تغیر ک۔ ۱۱ قفی صفوں میں اور  
ک۔ ۱ مدور تغیر عمودی صفوں میں کر سکتی ہیں اس سوا

لیجے دیکھ = مر + لے + ادک + ..... لے + ادن ..... لے + ادا ..... لے + ادک - ۱

[illegible]

(۳۵۳) وقوع ۳۷۹ و ۳۵۲ کی شہنشاہت سیان رشتہ کی قطع کو اس طرح بیان کر سکتی ہیں کہ







ابا فرض کرو کہ بڑا نسبت ن کی ہی لفظ اعداد زیرین  $۰۰۵$ ۔ اجتماع  
 ن اعداد کی ع اعداد  $۰۰۲$ ۔ ع میں سی ہوگی اور تعداد ایسی اجتماعوں کی  
 ن  $\frac{۰۰۲}{۰۰۵}$  ہوگی فرض کرو کہ ق کے معنی موافق سابق کے ہوں با کو اسی بلندی میں  
 جوق ہو جائی او سکوع سی تعمیر کرو اسی معلوم ہوا کہ موافق دوسری صورت کی ہم کو س کے  
 ایک رقم کی واسطی ع ق حاصل ہوگا اور یہ اس طرح پیدا ہوتا ہے کہ  $\frac{۰۰۲}{۰۰۵}$   $\frac{۰۰۲}{۰۰۵}$   
 میں سی ملن محدود اجتماع منتخب کر لین اسی واسطی جب ع بڑا نسبت ن کے ہے تو ہم کو  
 بہ حاصل ہوتا ہی کہ س = جمع ق اس میں ج مجموعہ  $\frac{۰۰۲}{۰۰۵}$  ارقام کا ہے جو  
 ممکن اجتماعوں سی پیدا ہوتا ہے

(۲۵۵) دفعہ گذشتہ کی دوسری صورت میں ہم دیکھتی ہیں کہ حاصل ضرب ن رتبی کی دو مقطعات کا  
 ن ہی رتبی کی مقطع میں نمایان ہو سکتا ہی اور علی ہذا القیاس حاصل ضرب ن رتبی کی تین مقطعات کا  
 ن ہی رتبی کی مقطع میں نمایان ہو سکتا ہی واسطی کہ اول ہم ن رتبی کی دو مقطعات کی حاصل ضرب کو  
 ن رتبی کے مقطع صورت میں نمایان کر سکتی ہیں اور اس جدید مقطع اور اصل مقطعات میں سے  
 تیسرے مقطع کو ن رتبی کی مقطع کی صورت میں ظاہر کر سکتی ہیں پس ہم دیکھتی ہیں کہ حاصل  
 ضرب تعداد مقطعات کا جو ایک ہی رتبی کے ہوں اسی رتبی میں نمایان ہو سکتا ہے  
 اسی معلوم ہوا کہ اکثر حاصل ضرب مقطعات کا خواہ کسی رتبی کے ہوں اور کتنی ہوں اسی  
 رتبے کے مقطع کے صورت میں اور اجزاء ضربی کی اعلیٰ رتبہ کے مقطع کے صورت میں  
 بھی نمایان ہو سکتا ہی واسطی کہ بموجب دفعہ ۳۴۸ کی اور سب مقطعات مثل اعلیٰ رتبے کے  
 مقطع کی بن سکتی ہیں اور جب یہ بن جائیں تو ان مقطعات کا حاصل ضرب او سے رتبے  
 کے مقطع کی صورت میں بن سکتی ہیں  
 (۲۵۶) فرض کرو کہ ہم کو حاصل ضرب دو مقطعات کا بنانا ہے

|     |   |   |   |     |
|-----|---|---|---|-----|
| لَا | : | : | : | لَا |
| لَا | : | : | : | لَا |

اور | باب اول : . . . باب اول  
| بن دن : . . . بن دن

بس اگر اس حاصل ضرب کو اسطرح تعبیر کریں

سید اول : سید اول  
سید اول : سید اول

اب ہم نئی اجزاء ذاتی چار طریقوں سے بناتی ہیں اسلئے کہ ہم قوانین میل می جی جی سے نئے کچھ اجزاء بنائیں

تیلے نوک = لے ۱ باس ۱ + لے ۲ باس ۲ + لے ۳ باس ۳ + لے ۴ باس ۴

یا سب سے رک = لئے و ابس د + لئے و ب ۲ رک + ۰ + لئے و ن بن و س

ماسے وک = اوی بکر د + اوے بکر د + . . . + ان وے بکر دن

ماسے وکر = اے باؤں + اے بھائی + ... + اے بن کے

(۳۵۷) فرض کرو کہ اے وادِ مثال اے وادِ قطع میں تعبیر کریں نو نظم رموز

۱۰۱ و ۱۰۲ ..... ۱۰۳ و ۱۰۴  
 ۱۰۵ و ۱۰۶ ..... ۱۰۷ و ۱۰۸  
 ۱۰۹ و ۱۱۰ ..... ۱۱۱ و ۱۱۲

کو نظم متکافیه رموز

الادب والعلوم - لندن

۱۲۱ و ۱۲۲ و ۱۲۳

آن وقت وہ فرمایا کہ میں نے تم کو جو کچھ بتایا ہے اس پر تم کو عمل کرنا ہے۔



۴ افقی تصفین اور عمودی صفین معدوم ہوں اور باقی رموز کو سر کا کر ایک رمز کے جدید  
 مربع میں لکھیں ہوں۔ م رتبی کا مقطع ہی تو اس مقطع کو مقطع جزئہ یا مقطع اصغر بلحاظ  
 اصلی مقطع کی کہتی ہیں اور رموز جو مشترک افقی اور عمودی صفوں میں ہوتی ہیں اول سے  
 ایک مربع رمز کا بنی گا جو ایک مقطع م رتبی کا ہو گا بہرہ ہی مقطع جزئہ یا مقطع اصغر ہے  
 ان دو مقطعات جزئہ یا اصغر کو ایک دوسری کا متمم کہتے ہیں  
 (۳۶۰) ن رتبی کی مقطع کو سر تعبیر کرتا ہی م رتبہ کا مقطع جزئہ نظم شکافیہ کا تعداد  
 برابر ہوتا ہی حاصل ضرب م۔ ۱ اور اصل نظم کے مقطع جزئہ متمم کے  
 فرض کرو کہ فوج ۱۰۰۰ روض ایک ترتیب اعداد ۱۰۰۲۰۰ کو تعبیر کرادے وک ۱۰۰۰ وک ۱۰۰۰  
 دوسرے ترتیب کو تعبیر کریں اور فوج ۱۰۰۰ اور سے وک ۱۰۰۰ اور میں ہر ایک کو م عددوں کی عین فرض کرو  
 اور روض ۱۰۰۰ اور لو ۱۰۰۰ کون۔ م عددوں کی جماعتیں فرض کر دیں

لکھوے وک ۱۰۰۰  
 لکھوے وک ۱۰۰۰

مقطع جزئہ نظم شکافیہ کا م رتبہ کا ہے اسکو ص سے تعبیر کرو

اب لکھوے وک ۱۰۰۰ لکھوے وک ۱۰۰۰ لکھوے وک ۱۰۰۰  
 لکھوے وک ۱۰۰۰ لکھوے وک ۱۰۰۰ لکھوے وک ۱۰۰۰  
 لکھوے وک ۱۰۰۰ لکھوے وک ۱۰۰۰ لکھوے وک ۱۰۰۰  
 لکھوے وک ۱۰۰۰ لکھوے وک ۱۰۰۰ لکھوے وک ۱۰۰۰

مراسمین ۱۰۰۰ اگر ترتیب فوج و ۱۰۰۰ روض اور سے وک ۱۰۰۰ لو و وک ۱۰۰۰

ایک ہی نوع کی ہوں اور ۱۰۰۰ ای اگر او کی ترتیبیں مختلف نوع کی ہوں  
 اب ہم ان دو مقطعات کا حاصل ضرب دریافت کرتے ہیں بموجب نمہ ۳۶۸ کی باخرازدانی کے  
 از دایہ صی مقطع ص کا ن رتبہ یہ سو دہر سکنا ہی پس م بجای ص کے





وہ صفر میں گرب ردو واحد ہی اور سبطر (م + ۱) افقی صف میں دوسرے گرب  
بہم ہم کو حاصل ہوتی ہے کہ

$$س م + ۱ = ل ح و ل و$$

اس طرح عمل کرنے سے ہم کو بہم دریافت ہوگا کہ (م + ۱) دین افقی صف حاصل ضرب

ص اور مر میں دی ہی جو مر میں (م + ۱) دین صف ہے

علیٰ ہذا القیاس (م + ۲) دین افقی صف حاصل ضرب میں دی ہی جو (م + ۲) دین عمودی مر میں

پس مقطع جو ساوی لہ ص مر کا ہو بموجب دفعہ ۳۴۴ کے تخیل اس حاصل ضرب کی

طرف ہو سکتا ہی جو مر اور ذیل کے (ن - م) رتبہ کے مقطع کو ضرب دینے سے پیدا ہوتا ہے

لر ردو لر دمود . . .

لص و ل و لص دمود . . .

$$ص = مر م - ۱ \left| \begin{array}{l} لر دمود \\ لر و ل و لر دمود \\ لر و ل و لر دمود \end{array} \right.$$

(۳۴۱) امثلہ ذیل طالب علم ثابت کری امثلہ (۴) (۵) (۶) میں ہم فی دہ مقطعات کہی ہیں

جس کے اجزاء ذاتی خود مقطعات ہیں

$$(۱) \left| \begin{array}{l} وسم وسم و ل ر \\ سم و و ل ر وسم \\ سم و ل ر و وسم \\ لر وسم وسم و وسم \end{array} \right| = سم سم + لر لر + سم سم - سم سم - لر لر - سم سم - لر$$

$$(۲) \left| \begin{array}{l} وسم وسم و ل ر \\ سم و و ل ر وسم \\ سم و ل ر و وسم \\ لر وسم وسم و وسم \end{array} \right| = (سم سم - سم سم + لر لر) +$$

|     |   |  |
|-----|---|--|
| (۳) | سر و سه و سه و لر                                   |  |
|     | سه و سر و لر و سه                                   |  |
|     | سه و لر و سر و سه                                   |  |
|     | لر و سه و سه و سر                                   |  |
|     | = بر + بر (سه + سه + لر + سه + سه + لر + سه + لر) + |  |
|     | (سه سه - سه سه + لر لر)                             |  |

|     |        |        |   |            |
|-----|--------|--------|---|------------|
| (۴) | س و ج  | ج و ل  | = | ل و سه و ج |
|     | ج و ل  | ل و سه |   | سه و ج و ل |
|     | ل و سه | ج و ل  |   | ج و ل و سه |
|     | ج و سه | ل و سه |   | ج و ل و سه |

|     |        |        |   |            |
|-----|--------|--------|---|------------|
| (۵) | ج و ل  | ل و سه | = | ل و سه و ج |
|     | ل و سه | ج و ل  |   | سه و ج و ل |
|     | ل و سه | ج و ل  |   | ج و ل و سه |
|     | ج و سه | ل و سه |   | ج و ل و سه |

|     |       |       |   |           |
|-----|-------|-------|---|-----------|
| (۶) | ب و د | د و ب | = | ب و د و ب |
|     | د و ب | ب و د |   | د و ب و د |
|     | ب و د | د و ب |   | ب و د و ب |
|     | د و ب | ب و د |   | د و ب و د |
|     | ب و د | د و ب |   | ب و د و ب |
|     | د و ب | ب و د |   | د و ب و د |

|     |       |       |   |           |
|-----|-------|-------|---|-----------|
| (۷) | ا و ب | ب و ا | = | ا و ب و ا |
|     | ب و ا | ا و ب |   | ا و ب و ا |
|     | ا و ب | ب و ا |   | ا و ب و ا |
|     | ب و ا | ا و ب |   | ا و ب و ا |
|     | ا و ب | ب و ا |   | ا و ب و ا |
|     | ب و ا | ا و ب |   | ا و ب و ا |

## ستائیسوان باب

استعمال مقطعات















مقطعات فرقوں کے حوالہ ضرب سی بدل جائیں اور اجزاء ضربی شمار کنندہ اور نسبتائیں

بخوبی اجائیں تو لائے کی قیمت اوپر کی صورت معینہ میں ہم کو معلوم ہوگی

(۲۷۳) مساوات معلوم سی خاص مقادیر کے ساقط کرنی سی ایک مساوات حاصل

کرنی کی اندر بھی ترکیب مقطعات کی کام آتی ہی فرض کرو کہ معادلات - ح (لا) = ۰ اور مخ (لا) =  
میں ہم کو لا ساقط کرتا ہے آئیں

$$\text{ح (لا)} = \text{لا} + \text{لا} + \text{لا} + \text{لا} + \text{لا} + \text{لا} + \text{لا} + \text{لا}$$

$$\text{ح (لا)} = \text{ب} + \text{ب} + \text{ب} + \text{ب} + \text{ب} + \text{ب} + \text{ب} + \text{ب}$$

اب ہم عمل اس طرح کرتے ہیں کہ

$$\text{ح (لا)} = \text{لا} + \text{لا} + \text{لا} + \text{لا} + \text{لا} + \text{لا} + \text{لا} + \text{لا}$$

$$\text{لا ح (لا)} = ۰ + \text{لا} + \text{لا} + \text{لا} + \text{لا} + \text{لا} + \text{لا} + \text{لا}$$

$$\text{مخ (لا)} = \text{ب} + \text{ب} + \text{ب} + \text{ب} + \text{ب} + \text{ب} + \text{ب} + \text{ب}$$

$$\text{لا مخ (لا)} = ۰ + \text{ب} + \text{ب} + \text{ب} + \text{ب} + \text{ب} + \text{ب} + \text{ب}$$

$$\text{لا مخ (لا)} = ۰ + ۰ + ۰ + ۰ + ۰ + ۰ + ۰ + ۰$$

$$\text{فرض کرو کہ س} = \text{لا} + \text{لا} + \text{لا} + \text{لا} + \text{لا} + \text{لا} + \text{لا} + \text{لا}$$

$$۰ + \text{لا} + \text{لا} + \text{لا} + \text{لا} + \text{لا} + \text{لا} + \text{لا}$$

$$\text{ب} + \text{ب} + \text{ب} + \text{ب} + \text{ب} + \text{ب} + \text{ب} + \text{ب}$$

$$۰ + \text{ب} + \text{ب} + \text{ب} + \text{ب} + \text{ب} + \text{ب} + \text{ب}$$

$$۰ + ۰ + ۰ + ۰ + ۰ + ۰ + ۰ + ۰$$



توس = ایک ضرور ارتباط مثال میں ہونا چاہیئے تاکہ ح (لا) اور مح (لا)













(۴) مساوات  $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$  کی صورت بدل کر ایسی مساوات بناؤ

کہ مثال او کی اعداد صحیح ہوں اور اول رقم کا سر ایک ہو

(۵) دوسرے رقم کو دور کر دو اس مساوات کو حل کرو

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

(۶) ذیل کی مساواتوں میں ہر یک مساوات کی ہیئت اس طرح تبدیل کرو کہ او کی

قیمتیں مجذور مساوات کی قیمتوں کی تفاوت کا ہوں اور قیمتوں کی خواص پر بحث لکھو

$$(۱) \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \quad (۲) \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$$

(۷)  $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$  کی ہیئت بدل کر ایسی مساوات بناؤ کہ جس کی قیمتیں کاف

مساوات معلوم کی قیمتوں کی ہوں اور ہیئت بدلی ہوئی جو مساوات حاصل ہو او کی قیمتوں کا بقدر واحد کم کرو

(۸) ثابت کرو کہ مساوات  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$  کی حقیقی قیمتیں مختلف علامت ہیں اور

دوسری زیادہ او کی حقیقی قیمتیں نہیں ہیں اور وہ ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہیں

(۹) مساوات  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$  کی قیمتیں ط و ص و س سے تعبیر ہوتی ہیں

اس مساوات کی ہیئت بدل کر او مساواتیں بناؤ جس کی قیمتیں بمعینہ تفصیل ذیل ہو

$$(۱) \text{ط} + \text{ص} + \text{س} \quad (۲) \text{ص} + \text{س} + \text{د} + \text{ط} + \text{ص}$$

$$(۳) \frac{\text{ص} + \text{س}}{\text{ص} + \text{ط}} + \frac{\text{س} + \text{ط}}{\text{ط} + \text{ص}} \quad (۴) \frac{\text{ط}}{\text{ص} + \text{س}} + \frac{\text{س}}{\text{ط} + \text{ص}}$$

$$(۵) \frac{\text{ص} + \text{س}}{\text{ط} + \text{ص}} + \frac{\text{ط} + \text{ص}}{\text{ص} + \text{س}} \quad (۶) \frac{\text{ط} + \text{ص}}{\text{ص} + \text{س}} + \frac{\text{ص} + \text{س}}{\text{ط} + \text{ص}}$$

$$(۷) \frac{\text{ط} + \text{ص}}{\text{ص} + \text{س}} + \frac{\text{ص} + \text{س}}{\text{ط} + \text{ص}} \quad (۸) \frac{\text{ط} + \text{ص}}{\text{ص} + \text{س}} + \frac{\text{ص} + \text{س}}{\text{ط} + \text{ص}}$$

$$(۹) \frac{\text{ط} + \text{ص}}{\text{ص} + \text{س}} + \frac{\text{ص} + \text{س}}{\text{ط} + \text{ص}} \quad (۱۰) \frac{\text{ط} + \text{ص}}{\text{ص} + \text{س}} + \frac{\text{ص} + \text{س}}{\text{ط} + \text{ص}}$$

$$(۱۱) \frac{\text{ط} + \text{ص}}{\text{ص} + \text{س}} + \frac{\text{ص} + \text{س}}{\text{ط} + \text{ص}} \quad (۱۲) \frac{\text{ط} + \text{ص}}{\text{ص} + \text{س}} + \frac{\text{ص} + \text{س}}{\text{ط} + \text{ص}}$$

$$(۱۳) \frac{\text{ط} + \text{ص}}{\text{ص} + \text{س}} + \frac{\text{ص} + \text{س}}{\text{ط} + \text{ص}} \quad (۱۴) \frac{\text{ط} + \text{ص}}{\text{ص} + \text{س}} + \frac{\text{ص} + \text{س}}{\text{ط} + \text{ص}}$$

$$(۱۵) \frac{\text{ط} + \text{ص}}{\text{ص} + \text{س}} + \frac{\text{ص} + \text{س}}{\text{ط} + \text{ص}}$$

(۱۰) مساوات لا<sup>۱</sup> + ق<sup>۲</sup> + لا<sup>۳</sup> + ر = قیمتین ط و ص و س میں سبکی بہت بدل کر اور مساواتیں بناؤ

جنکی قیمتیں معینہ بہ تفصیل ذیل ہوں

(۱)  $\left(\frac{ط}{ص-س}\right)^۲$  و  $\left(\frac{س}{ط-ص}\right)^۲$

(۲)  $ص + ط + ط + ص + ص + ط + ط + ص + س + ص$

(۱۱) اگر مساوات لا<sup>۱</sup> - لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۳</sup> + لا<sup>۴</sup> - لا<sup>۵</sup> = کی قیمتین ط و ص و س ہوں تو وہ مساوات بناؤ

ص + س و س + ط + ط + ص ہوں

(۱۲) اگر لا<sup>۱</sup> - لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۳</sup> = کی قیمتین ط و ص و س ہوں تو وہ مساوات بناؤ جسکی

قیمتین  $\frac{ص + س}{ط}$  و  $\frac{س + ط}{ص}$  و  $\frac{ط + ص}{س}$  ہوں

(۱۳) ثابت کرو کہ تیسری رقم مساوات

لا<sup>۱</sup> + ع<sup>۲</sup> + لا<sup>۳</sup> + ق<sup>۴</sup> + لا<sup>۵</sup> + ر = ۰

کی ساقط نہیں ہو سکتی اگر ع<sup>۲</sup> چھوٹا ۳ ق سے ہو

(۱۴) ثابت کرو کہ دوسری اور چوتھی رقم مساوات

لا<sup>۱</sup> + ع<sup>۲</sup> + لا<sup>۳</sup> + ع<sup>۴</sup> + لا<sup>۵</sup> + ع<sup>۶</sup> + ع<sup>۷</sup> = ۰

کی ایک ہی تبدیلی بہت سی ساقط ہو سکتی ہیں اگر ع<sup>۶</sup> = ع<sup>۷</sup> - ع<sup>۲</sup> (۴ - ع<sup>۲</sup>)

(۱۵) ان مساواتوں کو حل کرو

(۱) لا<sup>۱</sup> + لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۳</sup> + لا<sup>۴</sup> + لا<sup>۵</sup> + لا<sup>۶</sup> + لا<sup>۷</sup> + لا<sup>۸</sup> + لا<sup>۹</sup> + لا<sup>۱۰</sup> = ۰ (۲) لا<sup>۱</sup> + لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۳</sup> + لا<sup>۴</sup> + لا<sup>۵</sup> + لا<sup>۶</sup> + لا<sup>۷</sup> + لا<sup>۸</sup> + لا<sup>۹</sup> + لا<sup>۱۰</sup> = ۰

(۱۶) ثابت کرو کہ مساوات لا<sup>۱</sup> + لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۳</sup> + لا<sup>۴</sup> + لا<sup>۵</sup> + لا<sup>۶</sup> + لا<sup>۷</sup> + لا<sup>۸</sup> + لا<sup>۹</sup> + لا<sup>۱۰</sup> = ۰ میں دوسری اور تیسری رقم

ایک ہی تبدیلی بہت سی نہیں ساقط ہو سکتی لیکن اگر لا<sup>۱</sup> میں ضرب دین تو ہو سکتی ہے

(۱۷) ثابت کرو کہ ان درجہ کی مساوات میں سی دوسرے اور تیسرے رقموں کا ساقط کرنا ممکن ہے اگر

ن × (قیمتوں کے مجذورون کے مجموعہ) = قیمتوں کے مجموعہ کے مربع

باب ۵

(۱) ثابت کرو کہ مساوات  $۵ - ۴\sqrt{x} + ۳ = ۰$  کی کم سے کم دو خیالی قیمتیں ہیں

(۲) ثابت کرو کہ مساوات  $\sqrt{x} - ۲\sqrt{x} + ۱ = ۰$  کی کم سے کم چار خیالی قیمتیں ہیں

(۳) ذیل کی مساواتوں میں کیا نتائج حاصل ہو سکتی ہیں

$$(۱) \sqrt{x} - ۵\sqrt{x} + \sqrt{x} - ۱ = ۰ \quad (۲) \sqrt{x} - \sqrt{x} + ۱ + ۱ = ۰$$

## باب ۴

(۱) مساواتوں کو حل کرو ہر ایک مساوات کی برابر قیمتیں ہیں

$$(۱) \sqrt{x} - ۴\sqrt{x} + ۱۲ = ۰ \quad (۲) \sqrt{x} - ۳\sqrt{x} - ۹ + ۲۷ = ۰$$

$$(۳) \sqrt{x} - \sqrt{x} - ۱۲ + ۸ = ۰ \quad (۴) \sqrt{x} - ۵\sqrt{x} + ۸ + ۲۸ = ۰$$

$$(۵) \sqrt{x} - \sqrt{x} - \frac{۲}{۳} = ۰ \quad (۶) \sqrt{x} - \frac{۲}{۳} + ۱ = ۰$$

$$(۷) \sqrt{x} - \frac{۱}{۴} + \frac{۳}{۱۴} = ۰ \quad (۸) \sqrt{x} + ۱۴ + ۲۰ + ۸ = ۰$$

$$(۹) \sqrt{x} - ۱۱ + ۱۸ - ۸ = ۰$$

$$(۱۰) \sqrt{x} - ۲\sqrt{x} - \sqrt{x} + ۱۲ = ۰$$

$$(۱۱) \sqrt{x} - ۴\sqrt{x} + \sqrt{x} + ۱۸ = ۰$$

$$(۱۲) \sqrt{x} - ۴\sqrt{x} + \sqrt{x} + ۲۷ - ۲۷ = ۰$$

$$(۱۳) \sqrt{x} + ۳\sqrt{x} + \sqrt{x} + ۱۰ = ۰$$

$$(۱۴) \sqrt{x} - ۱۲ + \sqrt{x} + ۱۹ - ۹ = ۰$$

$$(۱۵) \sqrt{x} + ۱۴ + \sqrt{x} + ۹ + ۸ = ۰$$

$$(۱۶) \sqrt{x} + ۸ - \sqrt{x} - ۱۸ + ۱۱ - ۲ = ۰$$

$$(۱۷) \sqrt{x} - ۵\sqrt{x} - ۲ + \sqrt{x} + ۱ = ۰$$

$$(۱۸) \sqrt{x} - ۲\sqrt{x} - ۴ + \sqrt{x} + ۱۳ + ۴ = ۰$$

$$(۱۹) \sqrt{x} - ۳\sqrt{x} + ۴ - \sqrt{x} - ۱۷ + ۸ - ۱ = ۰$$







$$(۱) \quad \bar{a} - \bar{b} = ۱۲ - ۱۱۴ - \bar{a} = ۱۳ + ۵۵ + \bar{a} - \bar{b}$$

$$(۲) \quad \bar{a} - \bar{b} = ۳ - \bar{a} + ۱۱ - ۹ = ۴ - \bar{a} = ۵ - \bar{a} + ۱۱ - ۴ = ۴ - \bar{a}$$

$$(۴) \quad \text{مساوات } \bar{a} - \bar{b} = ۳۴ + \bar{a} = ۳۴ + \bar{a} - ۱۰ + ۱۰ = ۲۴ + \bar{a} = \text{کو حل کرو}$$

پہلی مساوات کی ایک قیمت سے چند دوسری مساوات کی ایک قیمت سے ہے

(۷) معادلات ذیل کو حل کرو جنہیں دو قیمتیں مشترک ہیں

$$\bar{a} - \bar{b} = ۲ - \bar{a} = ۲۴ + \bar{a} - ۲۰ = ۴ - \bar{a} = ۵ - \bar{a} + ۱۲ - ۸ = ۴ - \bar{a}$$

(۸) م اور ا کی رقموں میں اس مساوات

$$\bar{a} + ۷ + \bar{a} + (\bar{m} + \bar{m}) + \bar{a} + \bar{a} + \bar{a} + \bar{a} = ۷$$

کی قیمتیں جو سلسلہ حسابیہ میں ہیں دریافت کرو اور ع اور ق کو م اور ا کی رقموں میں بھیجی کرو

## باب ۱۰

(۱) ان معادلات متکا فیہ کو حل کرو

$$(۱) \quad \bar{a} - \bar{b} = ۲ - \bar{a} + \bar{b} = ۱ + ۷۲ - \bar{a} = ۱ + ۷۲ + \bar{a} - \bar{b} = ۱ + ۷۲ + \bar{a} - \bar{b}$$

$$(۲) \quad \bar{a} - \bar{b} = ۲ - \bar{a} + \bar{b} = ۲ + ۵۵ - \bar{a} = ۲ + ۵۵ + \bar{a} - \bar{b} = ۲ + ۵۵ + \bar{a} - \bar{b}$$

$$(۳) \quad \bar{a} - \bar{b} = ۲ - \bar{a} + \bar{b} = ۲ + ۵۵ - \bar{a} = ۲ + ۵۵ + \bar{a} - \bar{b} = ۲ + ۵۵ + \bar{a} - \bar{b}$$

$$(۴) \quad \bar{a} - \bar{b} = ۲ - \bar{a} + \bar{b} = ۲ + ۵۵ - \bar{a} = ۲ + ۵۵ + \bar{a} - \bar{b} = ۲ + ۵۵ + \bar{a} - \bar{b}$$

$$(۵) \quad \bar{a} - \bar{b} = ۲ - \bar{a} + \bar{b} = ۲ + ۵۵ - \bar{a} = ۲ + ۵۵ + \bar{a} - \bar{b} = ۲ + ۵۵ + \bar{a} - \bar{b}$$

$$(۶) \quad \bar{a} - \bar{b} = ۲ - \bar{a} + \bar{b} = ۲ + ۵۵ - \bar{a} = ۲ + ۵۵ + \bar{a} - \bar{b} = ۲ + ۵۵ + \bar{a} - \bar{b}$$

$$(۷) \quad \bar{a} - \bar{b} = ۲ - \bar{a} + \bar{b} = ۲ + ۵۵ - \bar{a} = ۲ + ۵۵ + \bar{a} - \bar{b} = ۲ + ۵۵ + \bar{a} - \bar{b}$$

$$(۸) \quad \bar{a} - \bar{b} = ۲ - \bar{a} + \bar{b} = ۲ + ۵۵ - \bar{a} = ۲ + ۵۵ + \bar{a} - \bar{b} = ۲ + ۵۵ + \bar{a} - \bar{b}$$

$$(۹) \quad \bar{a} - \bar{b} = ۲ - \bar{a} + \bar{b} = ۲ + ۵۵ - \bar{a} = ۲ + ۵۵ + \bar{a} - \bar{b} = ۲ + ۵۵ + \bar{a} - \bar{b}$$

$$(۱۰) \quad \bar{a} - \bar{b} = ۲ - \bar{a} + \bar{b} = ۲ + ۵۵ - \bar{a} = ۲ + ۵۵ + \bar{a} - \bar{b} = ۲ + ۵۵ + \bar{a} - \bar{b}$$

$$(۱۱) \quad \bar{a} - \bar{b} = ۲ - \bar{a} + \bar{b} = ۲ + ۵۵ - \bar{a} = ۲ + ۵۵ + \bar{a} - \bar{b} = ۲ + ۵۵ + \bar{a} - \bar{b}$$





(۲) مساوات  $لا + ق + لا + ر =$  کی یہ صورت  $لا = (لا + لا + ب)$  بن جای آسکی

واسطی ق اور ر میں کیا ارتباط ہونا ضرور ہے

اور یہ اس ارتباط کے مساوات  $لا + ۳ - ۳۴ + لا = ۲۴$  حل کرو

(۳) اگر مساوات  $لا + ع + لا + ق + لا + ر =$  کی قیمتیں سلسلہ ہندسہ میں ہوں تو  $ر = ق$  ہوں

یہی مساوات  $لا - لا + ۲ - ۸ = ۰$  کو حل کرو

(۴) اگر مساوات  $لا + ق + لا + ر =$  کی قیمتیں بقدر  $ر$  کے کم کجا جائیں تو ثابت کرو  
ہمت بدلی ہوئی مساوات جو حاصل ہوگی اسکی قیمتیں سلسلہ ہندسہ میں ہوں گیں بشرطیکہ  $ر$  مساوی ہو کہ

$۲۴ - ۲ = ۴ - ۲ = ۰$

(۵) اگر مساوات  $لا + ع + لا + ق + لا + ر =$  کی قیمتیں سلسلہ موسیقہ میں ہوں تو

$۲ ق = ۳ ر (۳ ق - ر)$

(۶) اگر مساوات  $لا + ع + لا + ق + لا + ر =$  کی قیمتیں سلسلہ موسیقہ میں ہوں تو  
مساوات  $لا + ۲ ق + لا + ق = ر$  میں سب سے بڑی اور سب سے چھوٹی قیمتیں شامل ہوں گیں

(۷)  $لا + ق + لا + ر =$  کی ناممکن قیمتیں صورت  $ر = ۰$  سے  $۸$  کی ہیں

تو ثابت کرو کہ  $۲ = ۳ + ۳ + ق$

(۸) اگر  $ر = ۰$  سے  $۸$  ہوتے ہیں قیمتیں مساوات  $لا + ع + لا + ق + لا + ر =$

کی ہوں ان میں سے حقیقی قیمت ہی اور مساوات  $لا + ۳ + لا + م + لا + م = ۰$  اس طرح پیدا ہوتی ہو

کہ اوپر کی مساوات کی قیمتیں بقدر  $ر$  کے کم کر دیں تو ثابت کرو کہ

$۳ = ۱ + ۲ + ۳ = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸$

(۹) مساوات  $لا + ع + لا + ق + لا + ر =$  کو صورت

$۲ - ۳ + م = ۰$  کی طرف  $لا = ۱$  ب فرض کر کے تبدیل کرو اور مساوات کو

$۲ - ۳ + م = ۱$  فرض کر کے حل کرو اور اسی ثابت کرو کہ اگر اصلی مساوات کی برابر قیمتیں ہوں تو





$$= 1 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4$$

1456

(۱) لاگرانژ کی ترکیب کے موافق مثبت تقریری قیمت مساوات  $u_1 = u_2 = u_3 = 1$  کی دریا کر

(۲) لاگرانژ کی ترکیب کے موافق مساوات  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  تقریبی قیمتیں

۱۱ اور ۲ کے درمیان دریافت کرو

باب

(۱) حدود غائی جو معین کی گئی ہیں ان کی درمیان جو مثبتین معادلات ذیل کی واقع ہوں ان کو

نیوٹن صاحب کی ترکیب سے نکالو

(۱) ۳-۷-۱۲ = قیمت ۲ اور ۳ کی درمیان

(۲)  $۵۴ - ۵۷ - ۵۷ - ۵۷ = ۲۷$ ۔ قیمت ۲ اور ۳ کے درمیان

(۳) لا ۲ - لا ۲۴ + لا ۴۴ = قیمت ۲ و ۳ و ۴ کے درمیان

(۴) لا - ۵ - ۵ = قیمت ۴ اور ۴ کے درمیان

(۵)  $14 - 8\sqrt{2} + 12\sqrt{2} - 8 = 4$ ۔ قیمت ۱۰ اور اس کے درمیان

(۲) معادلات ذیل کی اہمیت کی دریافت کرنی میں نیوٹن حساب کی ترکیب کام میں لاؤ

$$= 1.0 + 0.13 - 0.13 - 0.01 (1) \quad = 0.99 + 0.01 (1)$$

1851

( ) معادلات ذیل میں جو حدود غائی شعیں کی گئی ہیں ان کی درمیان معادلات کی

قیمت ہورسکی ترکیبے دریافت کرو

$$(۱) ۵۰ + ۵۰ - ۵۰ = ۵۰ \text{ قیمت در میان } ۳۰۲$$

(۲)  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$  قیمت در میان او کے

(۳)  $5 - 3 + 2 - 4 = 0$ ۔ قیمت درمیان ۱۲ اور ۳ کے

(۲) حل کرو مساوات  $۳ - ۱۷ = ۰$  کو موافق ہو رنر کی ترکیب کی

(۳) قیمتوں کا حساب ہو رنر کی ترکیب کے موافق معادلات ذیل کا کرو

$$(۱) ۳ + ۵ - ۳ = ۰ \quad (۲) ۳ + ۵ - ۲۰ = ۰$$

$$(۳) ۳ + ۵ - ۴۰ = ۰ \quad (۴) ۳ + ۱۰ + ۵ - ۱۲۰ = ۰$$

## باب ۱۹

(۱) مساوات  $۳ + ۵ - ۳ = ۰$  کی قیمتوں کو ب و س کی تقریبہ جملوں کی قیمت دریافت کرو

$$(۱) (۳ + ۵ - ۳) (ب + ب + ب) (س + س + س)$$

$$(۲) (۳ + ۵ - ۲۰) (ب + ب - ۲۰) (س + س - ۲۰)$$

$$(۳) ۳ + ۵ - ۴۰ (ب + ب - ۴۰) (س + س - ۴۰)$$

$$(۴) ۳ + ۱۰ + ۵ - ۱۲۰ (ب + ۱۰ + ۵ - ۱۲۰) (س + ۱۰ + ۵ - ۱۲۰)$$

$$(۵) (ب - ۳) (س - ۳) (ب - ۳)$$

(۲) اگر کو ب و س قیمتیں مساوات

$$۳ + ۵ - ۳ = ۰$$

کی ہوں تو قیمت  $۳ + ۵ - ۳$  (ب + ب) (س + س) کی دریافت کرو

$$(۳) مساوات  $۳ + ۵ - ۲۰ = ۰$  کی قیمتیں$$

کو ب و س . . ل فرض کر کے دریافت کرو

$$(۱) ۳ + ۵ - ۳ (ب + ب) (س + س) (ل + ل)$$

$$(۲) ۳ + ۵ - ۲۰ (ب + ب - ۲۰) (س + س - ۲۰)$$

(۵) ایسی مساوات بناؤ جسکی قیمتیں مساوات  $۳ + ۵ - ۳ = ۰$  کی ہر تین

قیمتوں کی مجموعہ کی جھنڈی کے برابر ہو اور نیز ایسی مساوات بھی بناؤ کہ جسکی قیمتیں برابر









اور ۱-۲-۳-۴-۵ کا دریافت کرو اور مساوات

$$= 1 - 0.4 - 0.4 + 0.4 + 0.4 - 0$$

کو حل کرو

(۸) مساوات لا + ق لا + ر لا + ص = کی قیمتیں بقدرہ کے کم کرو

اور رھ کی ایسی قدر مقرر کرو کہ بدلی ہوئی مساوات کی قیمتیں صورت  
 ۱ و ۲ د ب و ج کی ہوں اور بتلاؤ کہ بہر مساوات کس طرح حل ہو سکتی ہے

مثال ۴ -  $2 - 2^2 + 4^2 - 4^3 + \dots = 1$

(۹) جبرجہلموں کے جذور نکالنے کا جو عمل ہے اسے ثابت کر کر مسواۃ لہ + ع لآ + ق لآ + مد لآ + ص =

کی تحویل درج ذیل کی مساواتوں کی طرف ہو جائیگی اگر ع - ص - ص + ۲ = -

یا اگر  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4C} = 1 + C$

(۱۰) ثابت کرو کہ مساوات  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$  و  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$  تمام حقیقی قیمتیں نہیں

ہو سکتیں اگر  $3 + 3$  مثبت ہو

(۱۱) اگرچہ (۱۱) مجملہ ناطقہ صحیح لاکا ہو تو کیا ح (۱۱) =۔ ماح (۱۱) =۔ کی یقینی ایک تفسیر ہے۔

(۱۲) ایک ساوان کعبی قہمتوں کا بیہ جملہ اُب + ب + اس + س + ا نصف بالقرینہ ہے

تو بہاؤ اوسکی قیمت کیونکر دریافت کریں

(۱۳) فرض کرو کہ  $a$  و  $b$  و  $c$  ... ک ن درجہ کی مساوات مح (لا) = ۰ کی

قیمتیں ہوں اور اپنی سادی صورتیں کبھی تو ہوں اور یہ سب قیمتیں غیر مساوی ہوں ان ثابت کردہ کھلم

$$\frac{1}{(1)^2} + \frac{1}{(2)^2} + \frac{1}{(3)^2} + \frac{1}{(4)^2} + \frac{1}{(5)^2} + \dots$$

برابر واحد کے ہی اگر  $n = 1$  - اور برابر صفر کے ہی اگر  $n$  برابر صفر کے ہے یا اوس

ثبت صحیح عدد کی ہے جون۔ اسی کم ہے اور یہ بھی ثابت کرو کہ اگر

۲- اتوجملہ = (۱-۱) و پس پس



$$(۳) (۱) ۳ و ۲ (۲) ۳ و ۱ (۳) ۳ و ۲ (۴) ۳ و ۱ (۵) ۳ و ۱$$

$$(۵) ۲- و ۱ (۶) ۲ و ۱$$

$$(۴) (۱) ۱=۱ (۲) ۲=۲ (۳) ۳=۳ (۴) ۴=۴ (۵) ۵=۵ (۶) ۶=۶$$

$$(۴) (۱) ۱=۱ (۲) ۲=۲ (۳) ۳=۳ (۴) ۴=۴ (۵) ۵=۵ (۶) ۶=۶$$

$$(۶) (۱) ۱=۱ (۲) ۲=۲ (۳) ۳=۳ (۴) ۴=۴ (۵) ۵=۵ (۶) ۶=۶$$

$$(۷) (۱) ۱=۱ (۲) ۲=۲ (۳) ۳=۳ (۴) ۴=۴ (۵) ۵=۵ (۶) ۶=۶$$

$$(۸) (۱) ۱=۱ (۲) ۲=۲ (۳) ۳=۳ (۴) ۴=۴ (۵) ۵=۵ (۶) ۶=۶$$

$$(۹) (۱) ۱=۱ (۲) ۲=۲ (۳) ۳=۳ (۴) ۴=۴ (۵) ۵=۵ (۶) ۶=۶$$

ہو سکتا ہے کہ ع برابری کے ہے

$$(۱) ۱=۱ (۲) ۲=۲ (۳) ۳=۳ (۴) ۴=۴ (۵) ۵=۵ (۶) ۶=۶$$

$$(۵) (۱) ۱=۱ (۲) ۲=۲ (۳) ۳=۳ (۴) ۴=۴ (۵) ۵=۵ (۶) ۶=۶$$

$$(۷) (۱) ۱=۱ (۲) ۲=۲ (۳) ۳=۳ (۴) ۴=۴ (۵) ۵=۵ (۶) ۶=۶$$

$$(۸) (۱) ۱=۱ (۲) ۲=۲ (۳) ۳=۳ (۴) ۴=۴ (۵) ۵=۵ (۶) ۶=۶$$

$$(۹) (۱) ۱=۱ (۲) ۲=۲ (۳) ۳=۳ (۴) ۴=۴ (۵) ۵=۵ (۶) ۶=۶$$

$$(۱۰) (۱) ۱=۱ (۲) ۲=۲ (۳) ۳=۳ (۴) ۴=۴ (۵) ۵=۵ (۶) ۶=۶$$

$$(۱۱) (۱) ۱=۱ (۲) ۲=۲ (۳) ۳=۳ (۴) ۴=۴ (۵) ۵=۵ (۶) ۶=۶$$

$$(۱۲) (۱) ۱=۱ (۲) ۲=۲ (۳) ۳=۳ (۴) ۴=۴ (۵) ۵=۵ (۶) ۶=۶$$

$$(۱۳) (۱) ۱=۱ (۲) ۲=۲ (۳) ۳=۳ (۴) ۴=۴ (۵) ۵=۵ (۶) ۶=۶$$

$$(۱۴) (۱) ۱=۱ (۲) ۲=۲ (۳) ۳=۳ (۴) ۴=۴ (۵) ۵=۵ (۶) ۶=۶$$

$$(۱۵) (۱) ۱=۱ (۲) ۲=۲ (۳) ۳=۳ (۴) ۴=۴ (۵) ۵=۵ (۶) ۶=۶$$

$$(۱۶) (۱) ۱=۱ (۲) ۲=۲ (۳) ۳=۳ (۴) ۴=۴ (۵) ۵=۵ (۶) ۶=۶$$











